Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783).Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions

Guillaume Jouve

Université Claude Bernard Lyon 1

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques
Spécialité : Histoire des Mathématiques
Ecole doctorale : MathIF

Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783)

Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions

Tome I

Présentée et soutenue publiquement par
Guillaume Jouve

Le 10 juillet 2007, devant le jury ci-dessous

Umberto Bottazzini, professeur, Université de Milan
Pierre Crépel, CR au CNRS, Université Lyon 1, directeur de la thèse
Etienne Ghys, DR au CNRS, ENS de Lyon, membre de l'Académie des sciences
Christian Gilain, professeur, Université Paris 6, *rapporteur*
Jean-Pierre Kahane, professeur émérite, Université Paris XI, membre de l'Académie des sciences
Jean-Pierre Lohéac, MCF, HDR, co-directeur de la thèse, Ecole Centrale Lyon
Petru Mironescu, professeur, Université Lyon 1
Silvia Roero, professeur, Université de Turin, *rapporteur*

Remerciements

Je tiens plus particulièrement à remercier :

Silvia Roero et Christian Gilain qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse,

Umberto Bottazzini, Etienne Ghys, Jean-Pierre Kahane et Petru Mironescu qui ont bien voulu faire partie du jury,

Pierre Crépel, pour m'avoir initié à l'histoire des mathématiques et pour avoir dirigé mes recherches,

Jean-Pierre Lohéac, pour son soutien attentif,

Bernard Bru, pour sa gentillesse et ses conseils enrichissants,

Alexandre Guilbaud, pour sa disponibilité et son soutien amical,

Irène Passeron et les membres du comité d'édition des *Oeuvres Complètes* de D'Alembert,

Alain Coste, Hugues Chabot, Frédéric Chambat, Serge Demidov, Ivan Demin, Fabrice Ferlin, Marie-Françoise Gouteyron, Marc Massot, Nicolas Rieucau, ainsi que tous ceux qui ont pu m'apporter une aide ou un soutien au sein de l'Institut Camille Jordan et du LIRDHIST.

Sommaire du tome I :

Avant-propos

Le présent travail, comme toute thèse, est essentiellement individuel, mais il s'insère dans un projet collectif, l'édition des *Oeuvres Complètes* (*O.C.*) de D'Alembert[1], commencée au début des années 1990, notamment sous l'impulsion d'Anne-Marie Chouillet, directrice de la revue *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, et aujourd'hui dans une phase active de réalisation.

L'édition critique et commentée des Oeuvres Complètes

Une édition critique et commentée d'oeuvres complètes doit répondre à certaines exigences de rigueur et d'harmonie. Elle est « critique », car elle inclut un long travail bibliographique et archivistique : recherche d'imprimés rares et d'inédits, examen et rendu des variantes, datation des textes, etc. Elle est « commentée », parce qu'on met à la disposition du lecteur des notes de texte et de contexte, nécessitant une compréhension scientifique sans concession des écrits même les plus rebelles ainsi qu'une mise en perspective à l'aide des travaux des savants contemporains et des successeurs, et du présent de la recherche. Mais ces commentaires doivent néanmoins rester modestes, s'effacer derrière l'auteur, ne pas le noyer sous les interprétations. Il importe donc qu'une telle édition, qui reste un instrument de travail assez sobre, soit enrichie d'études « périphériques » (articles, thèses, ouvrages...) permettant d'ouvrir la perspective. C'est notamment l'occasion d'examens thématiques, d'études de personnages contemporains, voire de questions plus transversales ou plus générales d'histoire et philosophie des sciences.

Un travail collectif

L'édition des *O.C.* de D'Alembert comporte cinq séries :

– Série I : Traités et mémoires mathématiques, 1736-1756
– Série II : Articles de l'*Encyclopédie*
– Série III : Opuscules et mémoires mathématiques, 1757-1783
– Série IV : Ecrits littéraires, historiques et philosophiques
– Série V : Correspondance générale

Les oeuvres scientifiques couvriront environ 30 volumes de 600 pages, elles occupent une vingtaine de collaborateurs assez réguliers, dont certains en font l'essentiel de leur recherche. Cette « entreprise » exige une certaine division du travail et des coordinations nombreuses. En effet, les domaines traités par D'Alembert (algèbre, calcul différentiel et intégral, mécanique, hydrodynamique, astronomie, probabilité, optique ...) sont très enchevêtrés et découpés différemment d'aujourd'hui.

Pour le moment, deux volumes d'astronomie (I/6 et I/7) sont sortis, un volume de calcul intégral (I/4a) a été remis à l'éditeur et l'inventaire de la correspondance

[1] Paris, CNRS-Editions, 2002-...

(V/1) est en passe de l'être. Suivront les volumes III/1 et III/4, dans lesquels nous sommes directement impliqués. A grands traits, ces oeuvres scientifiques correspondent à trois périodes de rédaction et de publication, assez bien recouvertes par les trois premières séries :

– traités et mémoires « majeurs » (décennie 40 et début des années 50) : série I,
– articles scientifiques de l'*Encyclopédie* (décennie 50 et début dans années 60) : série II,
– *Opuscules Mathématiques* et mémoires « éclatés » (décennies 60-80) : série III.

Mais il y a une grande imbrication entre domaines et entre périodes, qui rend tout découpage assez discutable.

Les chercheurs lyonnais (rattachés à l'Institut Camille Jordan, au LIRDHIST de Lyon 1, ainsi qu'au laboratoire de sciences de la Terre de l'ENS) sont surtout impliqués dans la série III, mais ils participent également à des volumes d'autres séries. Les thèmes centraux du présent travail sont les cordes vibrantes, les équations aux dérivées partielles, l'acoustique et l'analyse. Deux autres thèses sont actuellement en cours d'achèvement à Lyon 1, consacrées elles-aussi à des ensembles assez bien délimités :

– Fabrice Ferlin (optique et instruments d'astronomie),
– Alexandre Guilbaud (écoulement et résistance des fluides, équations aux dérivées partielles).

Toutes ces thèses peuvent être partiellement dissociées, mais jusqu'à un certain point seulement. En particulier, les questions de calcul différentiel et intégral à plusieurs variables sont communes aux présentes recherches et à celles de A. Guilbaud, les principes des sciences physico-mathématiques à toutes. En outre, tout au long de sa vie, D'Alembert opère de nombreux retours sur les sujets qu'il a traités dans sa jeunesse : le suivi d'un domaine tel que « cordes vibrantes, équation des ondes et problèmes voisins » touche à une dizaine de volumes des *O.C.*, très directement pour certains (I/5, *Réflexions sur la cause générale des vents*), plus incidemment pour d'autres. Certains volumes des *Opuscules*, au vu de la diversité des sujets abordés par D'Alembert, exigent la participation d'une dizaine de chercheurs.

Le rôle de l'auteur de cette thèse dans cette entreprise collective

Notre rôle, depuis l'automne 2003, concerne les points suivants :

– Coordination et traitement (avec U. Bottazzini) du volume I/4b *Premiers textes sur les cordes vibrantes, 1747-1755* (les mémoires les plus célèbres, ceux où est introduite et résolue la fameuse EDP),
– Traitement de plusieurs mémoires ultérieurs qui forment chacun un morceau conséquent de tel ou tel volume des *Opuscules*, à savoir :
  – Mémoire 1 (*Opuscules*, t. I, 1761), in vol. III/1,
  – Mémoire 25 (*Opuscules*, t. IV, 1768), in vol. III/4,
  – Mémoire 59 § VII (*Opuscules*, t. IX, inédit), in vol. III/9,
  – plusieurs autres mémoires de taille plus réduite,

– Traitement de divers autres mémoires en lien plus ou moins étroit avec les précédents[2] et abordant l'analyse, l'acoustique, l'élasticité ou encore les principes de la Mécanique,
– Direction du vol. III/4 collectif (*Opuscules*, t. IV), auquel participent divers chercheurs du groupe (R. Nakata, M. Chapront-Touzé, P.C. Pradier, N. Rieucau, R. Mansuy, C. Gilain, F. Ferlin),
– Encadrement de stagiaires et d'étudiants annotant telle ou telle partie de mémoire (G. Faye, S. Jassionnesse, J. Larochette, L. Poujet, H. Saccilotto, L. Strauss-Kahn),
– Participation à d'autres aspects de la vie du groupe (comité d'édition, relectures, mises aux normes latex, organisation de colloques, etc.),
– Collaborations directes plus étroites avec d'autres chercheurs comme A. Guilbaud, C. Gilain, F. Chambat, du fait du sujet central de la thèse (équation des ondes, élasticité, cordes vibrantes).

La thèse

De tout cet ensemble plus large qu'un travail de doctorat, nous avons sélectionné pour la thèse ce qui concerne le corpus central : les mémoires tardifs (c'est-à-dire ceux les moins étudiés dans l'historiographie) sur les cordes vibrantes et les équations aux dérivées partielles (in *Opuscules*, t. I, IV et IX), avec en conséquence :
– leur présentation,
– les versions annotées de ces mémoires, sous une forme proche de l'édition en cours pour les *O.C.*,
– les questions qui y sont liées,
– des traductions en français d'études historiques anciennes importantes (originellement en allemand et en russe),
– des instruments de travail divers utiles à l'édition et au lecteur.

Divers chapitres de la thèse sont donc voisins de ce que seront les présentations des mémoires dans l'édition des *O.C.* ; d'autres le sont beaucoup moins en raison des différences d'objectifs.

[2] Certains ne sont d'ailleurs pas évoqués dans la présente thèse, ni dans les Annexes (Mémoires 5, 28 §III...).

Introduction

Le problème des cordes vibrantes se situe par nature à la croisée des chemins. Si l'on se place du point de vue de l'époque, on le qualifierait de physico-mathématique, et, aujourd'hui, on dirait peut-être qu'il appartient aux mathématiques appliquées. Cependant cela reflèterait mal la richesse et la variété des champs disciplinaires qu'il fait intervenir. En effet, dans l'univers scientifique du XVIII[e] siècle, le problème des cordes vibrantes fait appel à des outils de l'Analyse, à des notions de mécanique et d'élasticité, mais il est aussi lié à la question du son et, par ce biais, aux théories de la Musique.

Les cordes vibrantes dans les deux phases de l'oeuvre de D'Alembert

Dans son oeuvre scientifique, D'Alembert est revenu à de multiples reprises sur ce sujet. On peut dresser le récapitulatif suivant de ses principales interventions :

- « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration », *HAB* année 1747 (1749), p. 214-249,
- « Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration », *HAB* année 1750 (1752), p. 355-360,
- « Observations sur deux Mémoires de M. Euler et Daniel Bernoulli, insérés dans les mémoires de 1753 », inédit, soumis en nov. 1755, Mss I-M6 et I-M7, Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften,
- Mémoire 1 : « Recherches sur les vibrations des cordes sonores », *Opuscules*, t. I, 1761, p. 1-73,
- Mémoire 25 : « Nouvelles Réflexions sur les vibrations des Cordes sonores », *Opuscules*, t. IV, 1768, p. 128-224,
- Mémoire 59 §VII : « Sur les cordes vibrantes », inédit rédigé en 1781 destiné au t. IX des *Opuscules*, BI, MS 1790, f. 271-334.

S'ajoutent à ces contributions majeures quelques autres de moindre importance. On peut citer dans ce registre les articles « Cordes, vibration des » de l'*Encyclopédie* et de son *Supplément*[3], ainsi que des passages des mémoires publiés dans le tome III des *Mélanges de Turin* (1766)[4], et dans *HAB* année 1763 (1770)[5].

On peut distinguer deux phases dans ces recherches. La première regoupe les mémoires publiés dans les recueils de l'Académie de Berlin pour les années 1747 et 1750. Ces textes ont fait l'objet d'études dès le XIX[e] siècle, et ils ont également été

[3] Respectivement t. IV, 1754, p. 210, et t. II, 1777, p. 599b-600a.

[4] « Extrait de différentes lettres de M. D'Alembert à M. De la Grange écrites pendant les années 1764 & 1765 », *Mélanges de Turin*, t. III, 1766, p. 381-396.

[5] « Extrait de différentes Lettres de Mr. d'Alembert à Mr. de la Grange », *HAB* année 1763 (1770), p. 235-277.

examinés en profondeur dans une période plus récente. Le plus souvent, ils étaient invoqués pour insister sur le rôle de l'encyclopédiste dans l'émergence d'une première théorie des équations aux dérivées partielles, ou pour souligner sa conception de la notion de fonction dans le débat avec Euler qui s'ensuivit.

La seconde phase rassemble les contributions plus tardives de D'Alembert, et en premier lieu celles se trouvant dans les *Opuscules Mathématiques* : les Mémoires 1, 25 et 59 §VII. On peut y ajouter un manuscrit inédit daté de 1755 qui prépare le Mémoire 1. Ces travaux ont en revanche moins attiré l'attention des historiens, et leur intérêt a souvent été minimisé, un peu d'ailleurs comme toute la seconde moitié de l'oeuvre de D'Alembert. Certes, leur style est souvent décousu et rebutant, et le savant s'y exprime fréquemment sur le mode des « doutes et objections » à l'encontre de ses contradicteurs que sont Euler, Daniel Bernoulli, puis Lagrange. Mais leur contenu mérite néanmoins qu'on s'y attarde.

Le choix du corpus

Les Mémoires 1, 25 et 59 §VII abordent en effet une grande diversité de questions, d'ailleurs essentiellement mathématiques. D'Alembert y développe occasionnellement de nouvelles théories. Bien qu'elles soient souvent inabouties, les intuitions intéressantes dont il fait part ont pu ouvrir des voies dans certains domaines. De plus, ces mémoires entretiennent des liens avec d'autres textes des *Opsucules*.

Il était donc justifié que l'on s'y penche de manière approfondie afin d'en proposer une meilleure évaluation, et c'est pourquoi ils constitueront notre corpus de départ.

La démarche adoptée

Comme nous le laissions entendre, bien qu'elles évoquent à la marge des considérations émanant de l'Acoustique et de la Physique, les recherches de D'Alembert sur les cordes vibrantes sont surtout de nature mathématique. La présente thèse se concentrera donc essentiellement sur l'aspect mathématique dominant des textes étudiés.

En première partie, après un état des lieux de la recherche historique et un rappel sur les premiers textes de D'Alembert concernant les cordes vibrantes, nous nous livrerons à une étude approfondie de notre corpus, ce qui nous permettra de dégager quelques premières conclusions.

Puis, cette première approche nous permettra de poser un certain nombre de questions que nous tenterons d'élucider en seconde partie en recourant à un corpus plus large.

Nous proposerons enfin dans le volume d'annexe des versions annotées des textes de D'Alembert auxquels nous avons fait appel[6].

---

[6] Les mémoires dont nous proposons des versions annotées sont destinés aux volumes I/4b, III/1, III/4 et III/9 des *Oeuvres complètes et Critiques de D'Alembert*.

Partie I :
Etude du corpus

Chapitre 1 : Etat des lieux de la recherche historique

Les études historiques évoquant les travaux de D'Alembert sur le problème des cordes vibrantes sont nombreuses. Cependant, rares sont celles qui abordent son oeuvre tardive, et les meilleures parmi celles-ci, une étude de H. Burkhardt publiée en 1908[7] et un article de A.P. Youschkevitch de 1975[8], se trouvent être les moins accessibles, car elles sont relativement anciennes et respectivement en allemand et en russe. C'est pourquoi il nous a paru judicieux d'en proposer des traductions qui figurent dans le volume d'Annexes. Comme ces textes sont désormais ainsi disponibles, et comme ils font de surcroît eux-mêmes le point sur l'historiographie, nous donnerons ici un état des lieux assez synthétique pour éviter les répétitions.

Les premières véritables recherches en histoire des mathématiques mentionnant des mémoires de D'Alembert sur les cordes vibrantes sont publiées une vingtaine d'années après la mort de ce dernier. Dans le troisième tome de son *Histoire des Mathématiques* (1802), J.E. Montucla évoque la question à deux reprises : d'abord dans le passage consacré à l'intégration des équations aux différentielles partielles[9], puis dans celui traitant à proprement dit du problème des cordes vibrantes[10]. Il reconnaît à juste titre que D'Alembert a été le premier à résoudre ce problème dans ses recherches publiées dans *HAB* année 1747. Mais, il ne fait allusion aux Mémoires 1 et 25 des *Opuscules* qu'une seule fois en des termes plutôt négatifs :

> « D'Alembert, dans ses *Opuscules*, est encore revenu là-dessus ; mais ses objections étoient du même genre que celles qu'on fait contre le calcul différentiel, c'est une espèce de métaphysique sur laquelle on peut éternellement disputer, comme sur les logarithmes des nombres négatifs, sur la rigueur des calculs des infiniment petits, sur les forces vives, &c. »

Dans l'introduction d'un mémoire intitulé « Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique » présenté en 1854[11], Bernhard Riemann propose une synthèse de la première résolution due à D'Alembert. Mais s'il accorde dans ce texte une place importante à la polémique sur les cordes vibrantes, c'est surtout pour insister sur le fait que D. Bernoulli a le premier soutenu dans ce contexte qu'on pouvait représenter toute fonction par une série trigonométrique. Il ne mentionne ainsi le Mémoire 1 des *Opuscules* que pour mettre en évidence

---

[7] « Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration des Differentialgleichungen der mathematischen Physik », *Jahr. Deutsch. Math. Verein.*, t. X-2, 1908, p. 1-894.

[8] « A propos de l'histoire du débat sur les cordes vibrantes (D'Alembert et l'utilisation des fonctions 'discontinues') », *Istoriko-matematitcheskie Issledovania*, 20, 1975, p. 221-231.

[9] *id*, p. 342-352. Le passage en question est en fait dû à Lacroix.

[10] *id*, p. 659-667.

[11] *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Göttingue*, t. XIII ; *Oeuvres de Riemann*, t. I, p.225-272. La partie historique de ce mémoire est aussi publiée dans l'ouvrage de Jean-Pierre Kahane et Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset :*Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, 1998.

l'opposition de D'Alembert à cette idée, et il en reste là car son objectif est surtout d'introduire ses propres recherches sur l'intégrabilité.

Maximilien Marie fait, quant à lui, peu cas des premiers textes de D'Alembert sur les cordes vibrantes dans son *Histoire des sciences mathématiques et physiques* (1886)[12]. En revanche, il s'étend sur le Mémoire 1 des *Opuscules* qu'il évoque en des termes inhabituels :

> « Ce mémoire est la reproduction améliorée de celui que D'Alembert avait donné sur le même sujet, en 1747, dans le recueil de l'Académie de Berlin ; la solution du problème est la même, la démonstration seule est changée. »

Mais la présentation qu'il en donne est étrange. Il ne se penche en réalité de manière approfondie que sur les deux premiers articles du Mémoire 1, en détaillant beaucoup des aspects secondaires. Puis, il règle finalement le sort des 60 dernières pages du mémoire en quelques lignes.

Après ce bref tour d'horizon de la perception des travaux de D'Alembert sur les cordes vibrantes au XIX^e^ siècle, venons-en aux études historiques plus récentes et plus approfondies. Nous sommes obligés à ce stade de distinguer deux types d'historiographie. Il y a tout d'abord les études qui portent en tant que telles sur le problème des cordes vibrantes. C'est de le cas de celles d'Heinrich Burkhardt et de Clifford A. Truesdell[13] auxquelles nous consacrerons les parties 1 et 2 de ce chapitre. Mais, il existe également des recherches historiques qui, abordant un aspect mathématique particulier, font appel à des textes de D'Alembert sur les cordes vibrantes pour étayer leur argumentation. Nous en dirons quelques mots en partie 3 avant de conclure le chapitre.

1. L'étude de H. Burkhardt (1908)

Bien que le thème central du texte de Burkhardt soit la méthode des développements en série, il consacre une partie quasi autonome à l'histoire du problème des cordes vibrantes de 1747 à la fin du XVIII^e^ siècle (p. 10-47).

Après une synthèse des recherches de D. Bernoulli sur les systèmes oscillants dans la première moitié du XVIII^e^ siècle, Burkhardt donne une présentation plutôt équilibrée des premières recherches sur les cordes de D'Alembert (*HAB* année 1747) et Euler (*HAB* année 1748). A propos du Mémoire 1, il retient certains aspects fondamentaux de la polémique avec Euler comme le rejet des sauts de courbure (§6). Il estime d'ailleurs qu'on ne peut pas départager les deux savants dans leur débat sur les fonctions. Il aborde ensuite les recherches de D. Bernoulli parues dans *HAB* année 1753 (§8). Dans celles-ci, ce dernier affirme que toute fonction peut se développer en séries trigonométriques. Burkhardt fait à nouveau référence au Mémoire 1 pour mettre en évidence l'opposition de D'Alembert à cette idée.

---

[12] t. VIII, Paris, 1886.

[13] *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788*, *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, série II, vol. 11, Section 2, Zürich, 1960.

Puis, il propose une étude approfondie des mémoires de Lagrange publiés dans les tomes I et II des *Mélanges de Turin* (1759 et 1762), et évoque dans ce contexte les réactions de D'Alembert dans le Supplément du Mémoire 1 et le Mémoire 25 (§12). Il ne s'intéresse toutefois qu'aux passages du Mémoire 25 concernant la polémique entre D'Alembert et Lagrange, mais souligne la pertinence des critiques de D'Alembert.

Bien qu'elle omette certains aspects de l'oeuvre de D'Alembert, l'étude de Burkhardt reste une contribution remarquable à l'histoire des mathématiques. Elle a d'ailleurs inspiré C.R. Wallner qui y fait référence à plusieurs reprises dans sa contribution aux *Vorlesungen über Geschichte des Mathematik* de Moritz Cantor[14], et C. Truesdell y renvoie régulièrement dans son étude de 1960.

2. L'étude de C. Truesdell (1960)

Conçu comme un panégyrique d'Euler, l'ouvrage de Clifford A. Truesdell intitulé *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788* n'accorde forcément qu'une place d'acteur secondaire à D'Alembert. Mais cela ne suffit pas pour expliquer la dureté de Truesdell à l'égard de l'encyclopédiste. Ainsi, le paragraphe consacré à ses premières recherches débute ainsi (p. 237) :

> « After the brilliant mechanical researches just described, we must now descend to the celebrated and deplorable quarrel which watered the effort of the principal savants at the middle of the century. What follows confirms the principle that ever the greatest quantity of paper is smeared over with the dullest matter. »

Les mêmes a priori transparaissent dans tous ses commentaires suivants sur D'Alembert. Bien qu'il détaille les mémoires de *HAB* année 1747 et 1750, il considère que ce dernier ne justifie par aucun argument les restrictions qu'il impose aux fonctions intervenant dans l'intégration d'une EDP, et il ajoute que son attitude prend ses racines dans un leibnizianisme désuet pour l'époque. En conséquence, Truesdell estime qu'Euler est le premier à utiliser des fonctions parfaitement arbitraires dans *HAB* année 1748.

Dans la suite, Truesdell qualifie les *Opuscules Mathématiques* de :

> « collections of papers having little or no solid content, not of the quality or style fit for a learned journal, but nevertheless sufficient, with the renown of D'Alembert's name among the "semi-learned", to be sold succesfully by a commercial publisher. »

Dès lors, son attitude va consister à dénigrer les Mémoires 1 (p. 274-275) et 25 (p.286-288) en les présentant comme des collections d'ergotages sans intérêt

[14] « Totale und Partielle Differentialgleichungen, Differenzen und Summenrechnung, Variationsrechnung », *Vorlesungen über Geschichte des Mathematik*, t. IV, Moritz Cantor, 1908, p. 871-1074. Montucla semble être sa seconde source d'inspiration pour ce qui est de la fin du XVIII^{e} siècle.

scientifique dus à une personne aigrie.

3. Les études sur des sujets spécifiques

Afin de procéder à un état des lieux de la recherche historique aussi exhaustif que possible, il nous faut maintenant évoquer les études portant sur des thèmes spécifiques, généralement purement mathématiques, et faisant entre autres appel à des mémoires de D'Alembert sur les cordes vibrantes. On peut distinguer plusieurs thèmes :

La théorie des EDP

Initialement propagée par Cousin[15] et Lacroix[16], l'idée selon laquelle Euler était le fondateur de la théorie des équations aux dérivées partielles a longtemps dominé l'histoire des mathématiques. Mais, plusieurs études ont été publiées sur le sujet depuis une vingtaine d'années (Engelsman[17], Demidov[18], Houzel[19], Lützen[20]) et toutes s'accordent pour reconnaître à D'Alembert la paternité de cette invention. Néanmoins, ces études accordent peu de place aux *Opuscules Mathématiques.*

L'histoire du concept de fonction

A.P. Youschkevitch est sans aucun doute l'auteur des recherches les plus complètes sur l'histoire du concept de fonction. A travers ses diverses publications[21], il a eu l'occasion de s'intéresser à un corpus très large et il est un des seuls à s'être penché dans un article en russe publié en 1975 sur les mémoires du tome IX inédit des *Opuscules*[22], où D'Alembert aborde la question des fonctions discontinues. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de proposer une traduction de cet article dans les Annexes de cette thèse. Certaines des conclusions qu'y formule Youschkevitch méritent néanmoins d'être réexaminées, au premier rang desquelles celle selon laquelle l'encyclopédiste se rallie sur la fin de sa vie à la position triomphante

[15] *Introduction à l'étude de l'Astronomie Physique*, Paris, David l'aîné, Paris, 1787.

[16] *Histoire des Mathématiques*, J.F. Montucla, t. III. Nous faisons allusion à une note de Lacroix se trouvant à la p. 344 de cet ouvrage.

[17] « D'Alembert et les équations aux dérivées partielles », *Dix-huitième siècle*, n°16, 1984, p. 27-37.

[18] « D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles », *Jean d'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix*, Ed. des Archives contemporaines, Paris, p. 333-350.

[19] « Les équations aux dérivées partielles : 1740-1780 », *Analyse et dynamique, étude sur l'œuvre de d'Alembert*, Presses de l'université de Laval, 2003, p. 237-258.

[20] « Partial differential equation », *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences*, I. Grattan-Guiness, London, 1994, p. 452-469.

[21] « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXᵉ siècle », *Fragments d'histoire des mathématiques*,Brochure A.P.M.E.P n° 41, 1981, p. 7-68.

[22] « A propos de l'histoire du débat sur les cordes vibrantes (D'Alembert et l'utilisation des fonctions 'discontinues') », *Istoriko-matematitcheskie Issledovania*, 20, 1975, p. 221-231.

d'Euler.

Les développements en séries

Dans ce domaine, on recense essentiellement des études dont la problématique porte sur les manipulations formelles des séries. Parmi celles-ci, on peut citer notamment un article de Giovanni Ferraro[23]. Mais les réserves de D'Alembert sur la généralité des développements notamment en séries entières ont peu attiré l'attention.

4. Conclusion

On peut donc conclure de ce bref état des lieux que les lacunes de l'historiographie valident nos choix d'étude car les mémoires des *Opuscules* sur les cordes vibrantes n'ont jamais fait l'objet d'un examen exhaustif[24]. Les quelques historiens des mathématiques qui s'y sont intéressés les ont considérés comme des appendices des premières recherches de D'Alembert, et leurs évaluations ont souvent été divergentes, comme on le voit avec Burkhardt et Truesdell.

Aux différentes lacunes que nous avons pointées dans ce chapitre, s'ajoute le fait que la pensée de D'Alembert n'a jamais vraiment été étudiée « de l'intérieur » afin de comprendre ses motivations et ses évolutions. Les connexions avec d'autres domaines de recherches, particulièrement flagrantes pour les Mémoires 25 et 59 §VII, ont ainsi peu été investiguées, et des thèmes comme l'articulation entre Physique et Analyse ont été passés sous silence.

[23] « Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815 », *Historia Mathematica*, 34 (2007), p. 62-88.

[24] Nous aurions pu encore citer d'autres auteurs comme S.F. Lacroix et M. Kline qui omettent les mémoires des *Opuscules* sur les cordes vibrantes.

Chapitre 2 : Les premiers écrits de D'Alembert sur les cordes vibrantes

Préliminaires

Au début du XVIII^{e}, les recherches sur le problème des cordes vibrantes n'ont pas encore l'ambition qu'elles vont atteindre avec la première intervention de D'Alembert dans *HAB* pour l'année 1747[25]. Avant 1713, les recherches concernent essentiellement le calcul du temps de vibration d'une corde tendue fixe en ses deux extrémités. Cette année-là, Brook Taylor tente le premier de déterminer à l'aide de fonctions la courbe que forme une telle corde au cours de ses oscillations[26]. Il fait appel au calcul différentiel, mais n'utilise alors que des fonctions d'une seule variable. Dans leurs travaux qui suivront, Jean Bernoulli et Euler s'approcheront, sans toutefois y parvenir, de l'équation aux dérivées partielles que D'Alembert établit et résout dans ses recherches de *HAB* année 1747. Rappelons que, dans cette période, plusieurs questions non sans lien avec les cordes vibrantes suscitent un intérêt certain chez les scientifiques. On peut citer notamment le problème de la courbe élastique, celui des lames vibrantes, celui d'une corde chargée de poids suspendue par une des ses extrémités[27]... D'Alembert lui-même s'intéresse d'ailleurs à ce dernière question dans le Problème V de son *Traité de Dynamique* publié en 1743, avant ses premiers mémoires sur les cordes vibrantes.

1. Les premières recherches de D'Alembert et Euler

La première intervention de D'Alembert

Quelques années plus tard, il publie ses « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration » dans *HAB* pour l'année 1747. Avec sa *Cause*

[25] « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration », *HAB* année 1747 (1750), p. 214-249 ; *O.C.*, vol. I/4b (ce mémoire est découpé en deux parties : p. 214-219 puis p. 220-249).

[26] B. Taylor : « De motu nervi tensi », *Philosophical Transactions.*, vol. 28, 1713 (1713), p. 26-32. Il étudie à nouveau la question avec le même état d'esprit dans son *Methodus Incrementorum directa & inversa* publié en 1715 (p. 85-95).

[27] Ces questions ainsi que l'histoire du problème des cordes vibrantes dans la première moitié du XVIII^{e} ont été notamment étudiées par C. Truesdell dans *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788, Introduction to Leonhardi Euleri* (*Opera Omnia*, série II, vol. 11, Section 2, Zürich, 1960), et H. Burkhardt dans « Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration des Differentialgleichungen der mathematischen Physik » (*Jahr. Deutsch. Math. Verein.*, t. X-2, 1908, p. 1-894). Chacun de ces auteurs a ses spécificités. Truesdell débute son étude au XVII^{e} siècle et insiste beaucoup sur Euler, alors que Burkhardt donne une présentation plus équilibrée et tournée vers le XIX^{e}.

des Vents[28], ce mémoire est considéré comme fondateur de la première théorie des équations aux dérivées partielles digne de ce nom[29]. Cependant, il nous faut préciser ici que ni le terme d'*équations aux dérivées partielles*, ni une quelconque désignation voisine, n'apparaissent encore. Il faut attendre le début des années 1770 pour entendre parler d'*équations aux différences partielles*. Les termes de *conditions initiales* et de *conditions aux limites* sont également absents chez D'Alembert, même si nous les emploierons parfois par commodité[30].

Dans ce premier mémoire sur les cordes vibrantes, D'Alembert a pour objectif de montrer que, contrairement à ce qu'avait prétendu Taylor, la corde ne forme pas nécessairement une sinusoïde à chaque instant, et qu'il existe une solution plus générale. A cette fin, il considère une corde de longueur l fixe en ses deux extrémités, et introduit la fonction $y(x,t)$ qui désigne l'excursion du point de la corde d'abscisse x à l'instant t. Puis, il établit l'équation régissant les vibrations[31], $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, réussissant ainsi là où plusieurs de ses prédécesseurs avaient échoué.

Il transforme ensuite cette équation aux dérivées partielles, en faisant appel à des résultats énoncés par Euler dans les années 1730[32]. L'idée fondamentale est qu'une forme différentielle $pdt + qdx$ est complète[33], si et seulement si[34], on a $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dt}$. Si on pose $p = \dfrac{dy}{dt}$ et $q = \dfrac{dy}{dx}$, $pdt + qdx$ est évidemment une différentielle exacte, mais $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ entraîne $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dq}{dx}$, et $qdt + pdx$ est aussi une différentielle exacte. D'Alembert combine donc $pdt + qdx$ et $qdt + pdx$ et montre que $p + q$ est fonction de $x + t$ et $p - q$ de $x - t$.

Il parvient ainsi à l'expression générale de la solution $y = \Psi(t+x) + \Gamma(t-x)$, et envisage trois types de conditions intiales (position rectiligne et vitesse non nulle, corde écartée de sa position d'équilibre avec vitesse de départ nulle, cas mixtes). Dans chaque cas, il donne une construction géométrique permettant de déduire la courbe formée par la corde à chaque instant t de son allure initiale ou de la

[28] *Réflexions sur la cause générale des vents*, Paris, David l'Ainé, 1747, et dans *Pièce qui a remporté le Prix proposé par L'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Prusse pour l'année 1746*, Berlin, Haude & Spener, 1747.

[29] Sur ce point, voir S. Demidov : « D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles », *Jean d'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix*, Ed. des Archives contemporaines, Paris, p. 333-350 ; et S. Engelsman : « D'Alembert et les équations aux dérivées partielles », *Dix-huitième siècle*, n°16, 1984, p. 27-37.

[30] Nous expliquons plus loin au chapitre 2A que ces termes sont en fait assez inappropriés.

[31] Dans sa formulation, x est en fait remplacé par s, l'abscisse curviligne, car les deux grandeurs sont confondues du fait de la petitesse des vibrations.

[32] « De infinitis curvus eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis », *Comm. Acad. Petrop.*, volume 7, 1734 (1740), p. 174-183 (E44) ; et « Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis », *id.*, p. 184-200 (E45).

[33] On dirait aujourd'hui exacte.

[34] Si l'équivalence n'est pas vraiment prouvée, elle est en tous cas utilisée comme telle.

courbe des vitesses initiales. Il clôt ses recherches par une série de remarques. Ces commentaires sur des sujets divers nous permettent notamment d'apercevoir le lien dans l'esprit de D'Alembert entre les cordes vibrantes et le Problème V du *Traité de Dynamique* où il étudie déjà le mouvement d'un fil chargé de plusieurs poids. Une autre remarque mérite particulièrement d'être signalée puisqu'elle nous indique que le savant a déjà en tête le parallèle entre corde vibrante et vibration sonore à cette époque. Il affirme en effet :

> « Si on supposoit que la corde fit des vibrations longitudinales de C vers A, au lieu de les faire perpendiculairement à sa longueur, alors imaginant que y fut l'espace décrit par un point quelconque, on auroit la même équation que ci-dessus (art. VI.)[35] entre y et x. Par là on pourroit calculer la vitesse du son d'une manière beaucoup plus générale, qu'on ne l'a fait jusqu'ici. »[36]

A cette époque, les allusions à ses deux futurs adversaires que seront Euler et Daniel Bernoulli sont encore marginales.

La réplique immédiate d'Euler

Dans les années 1730, bien qu'il ait été l'auteur de la théorie des équations modulaires[37], Euler n'était pas parvenu à une véritable théorie des EDP, car il ne se posait pas les problèmes en terme d'intégration, et n'avait pas réussi à appliquer ses découvertes à des problèmes physico-mathématiques[38]. Un an après les recherches de D'Alembert, il publie dans les mêmes recueils un mémoire sur les cordes vibrantes[39] dans le même esprit que celui de D'Alembert. Il est d'ailleurs plutôt élogieux vis-à-vis de ce dernier :

> « M. d'Alembert s'est attaché le premier, avec un succès des plus heureux, à l'examen de ce Problème, si difficile tant dans la Mecanique que dans l'Analyse, & il en a communiqué à notre Academie une trés belle solution. »

Il n'ignore pas non plus les similitudes entre les recherches de D'Alembert et les siennes, et il déclare :

> « Quoiqu'elle ne differe pas beaucoup de celle de M. D'Alembert ; cependant la grande étenduë de ce sujet fait que je me persuade d'avoir ajouté quelques observations assez

---

[35] Il s'agit de l'équation $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

[36] *HAB* année 1747 (1750), p. 248. Il ne mettra cette remarque en pratique que bien plus tard dans ses *Opuscules* : Mémoire 34 §II, « Sur la vitesse du Son », *Opuscules*, t. V, 1768, p. 138-146 ; *O.C.*, vol. III/5.

[37] Les deux mémoires d'Euler E44 et E45 évoqués précédemment font partie de ses recherches sur les équations modulaires. Le savant y étudie une famille de courbes $y_\alpha(x)$ dépendant d'un paramètre α et les relations entre leurs différentielles en x et en α.

[38] Cette analyse que nous reprenons, défendue notamment par Engelsmann et Demidov, va à l'encontre de celle, due à J.A.J. Cousin, qui a longtemps dominé l'histoire des mathématiques et qui attribuait cette innovation à Euler.

[39] « Sur la vibration des cordes », *HAB* année 1748 (1750), p. 69-85 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 10, p. 63-77 (E140).

> interessantes dans l'application des formules générales. »[40]

Après une mise en équation certes plus détaillée que celle de D'Alembert, Euler aboutit à la même équation aux dérivées partielles et cherche à la résoudre. Dans cette étape, il commet une erreur remarquée par Heinrich Burkhardt[41] qui revient à ne traiter que le cas où la corde est lâchée sans vitesse initiale. Le mémoire E140 contient également moins de digressions que celui de D'Alembert.

Cependant, comme le montrera leur querelle ultérieure, la similitude des travaux des deux savants est à relativiser car, comme le signale déjà H. Burkhardt :

> « Après cet exposé, on pourrait avoir l'impression que les solutions de D'Alembert et d'Euler ne diffèrent que sur des points d'importance secondaire. Ce n'est cependant le cas qu'en apparence, car ils utilisent certes les mêmes mots, mais leur associent toutefois des représentations différentes. [...] Mais, ils se différencient dans l'utilisation qu'ils font du mot fonction : lorsque D'Alembert l'emploie et écrit $y = f(x)$, il pense seulement à une expression analytique de ce type ; en revanche Euler pense à une courbe donnée arbitrairement (graphiquement). »[42]

La réaction de D'Alembert

Deux ans plus tard, D'Alembert présente un complément à ses recherches précédentes[43]. Dans ce mémoire assez bref, il détaille la résolution d'une équation fonctionnelle et se livre à des considérations sur le son et le temps de vibration d'une corde. Il en profite également pour réagir au mémoire E140 d'Euler, auquel il s'adresse déjà avec un ton plus condescendant. Il faut préciser que l'année 1750 est marquée par une brouille entre les deux savants qui durera plus de dix ans[44]. Leur point de désaccord essentiel sur les cordes vibrantes apparaît de manière nette lorsque D'Alembert précise à l'attention d'Euler :

> « Mais je crois devoir avertir icy, de crainte que quelques lecteurs ne prennent mal le sens de ses paroles, que pour avoir cette courbe génératrice, il ne suffit pas de transporter la courbe initiale alternativement au dessus & au dessous de l'axe ; il faut de plus que cette courbe ait les conditions que j'ay exprimées dans mon mémoire, c'est à dire que si on suppose $y = \Sigma$ pour l'équation de la courbe initiale, il faut que Σ soit une fonction impaire de s, & qu'en général les ordonnées distantes l'une de l'autre de la quantité $2l$, soient égales ; ce qui ne peut avoir lieu, à moins que la courbe ne soit mechanique, & telle que je l'ay déterminée dans mon Mémoire. »

---

[40] *HAB* année 1748, p. 71.

[41] *Jahr. Deutsch. Math. Verein.*, t. X-2, 1908, p. 13 (§5).

[42] Traduit de l'allemand. *Jahr. Deutsch. Math. Verein.*, t. X-2, 1908, p. 14 (§5).

[43] « Addition au Mémoire sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration », *HAB* année 1750 (1752), p. 355-360.

[44] L'origine de cette brouille concerne le Prix de l'Académie de Berlin de 1750 sur la théorie de la résistance des fluides. D'Alembert soumet à cette occasion un mémoire : *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* (Paris, David, 1752 ; *O.C.*, vol. I/8). Mais celui-ci est rejeté et le Prix est reconduit pour deux ans. D'Alembert pense qu'Euler, alors responsable de la classe de Mathématiques, a influencé cette décision. On peut également consulter sur le sujet la thèse de Gérard Grimberg : *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique.*

La courbe génératrice dont parle D'Alembert représente, selon le cas (corde pincée ou frappée), la position initiale de la corde ou sa vitesse initiale. Les conditions aux limites du problème imposent que cette courbe soit impaire et $2l-$périodique. Mais, pour D'Alembert, il ne suffit pas que ces deux propriétés soient vérifiées simplement d'un point de vue géométrique, il faut que l'expression de cette fonction sur l'intervalle $[0, l]$ soit la même partout, et donc que cette expression soit elle-même impaire et périodique. C'est pourquoi il affirme que cette courbe doit être « mechanique »[45]. Pour l'instant, dans ce mémoire, il n'apporte pas vraiment d'arguments pour étayer sa position sur ce point. Il semble penser que le fait d'utiliser un même symbole (Σ) pour désigner une fonction empêche celle-ci de changer d'expression. Il faut cependant préciser qu'en défendant ainsi la permanence de l'expression, D'Alembert se fait l'écho du sentiment général de son époque, surtout pour ce qui est des problèmes physico-mathématiques. Dans ses écrits suivants, il décrira les courbes qu'il admet comme « assujetties à une même loi », et étaiera considérablement son point de vue en produisant des arguments.

Dans la suite de son « Addition », D'Alembert se livre à une comparaison des temps de vibration d'une corde et d'un fil chargé de poids pour en déduire des réserves sur la possibilité d'approximer la première par le second. Il achève enfin son mémoire par des considérations sur les cordes et le son qu'elles émettent, qui entretiennent visiblement un lien avec ses conceptions en matière de théorie de la musique. Dans un cas comme dans l'autre, on constate une résistance à la mathématisation de l'Acoustique[46].

2. La cristallisation de la polémique entre Euler, D'Alembert et Daniel Bernoulli

Les mémoires de D. Bernoulli dans HAB année 1753

Comme nous l'avons dit en introduction, Daniel Bernoulli publie deux mémoires dans *HAB* année 1753[47]. Dès les premières pages, il fait référence à Taylor et à ses solutions sinusoïdales (les « compagnes de la cycloïde ») et reproche à Euler et à D'Alembert d'avoir admis de nouvelles courbes « dans un sens tout-à-fait

[45] Si l'on se réfère à l'article COURBE de l'*Encyclopédie*, on trouve les définitions suivantes :

> « Les courbes algébriques ou géométriques sont celles où la relation des abscisses AP aux ordonnées PM [...] est ou peut être exprimé par une équation algébrique »
>
> « [Une] courbe transcendante ou méchanique est celle qui ne peut être déterminée par une équation algébrique. »

Une courbe méchanique peut donc être exprimée à l'aide de fonctions usuelles non algébriques comme sinus, ou comme solution d'une équation différentielle non triviale. Dans l'article COURBE, D'Alembert envisage encore une distinction entre ces deux cas.

[46] v. Patrice Bailhache, « D'Alembert théoricien de la musique : empirisme et nature ».

[47] « Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 & 1748 », *HAB* année 1753 (1755), p. 147-172 ; « Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans une même système de corps », *id*, p. 173-195. Textes se trouvant également dans *Werke*, Bd. 6.

impropre »[48].

Adoptant une démarche qu'il qualifie de « synthétique » par opposition à l'approche analytique de ses deux adversaires, Daniel Bernoulli décrit les vibrations de la corde comme une combinaison de vibrations simples, représentées chacune par une fonction du type $\alpha\sin(\frac{n\pi x}{a})$, n étant un entier et a la longueur de la corde[49]. Il aboutit ainsi à l'expresion $y = \alpha\sin(\frac{\pi x}{a}) + \beta\sin(\frac{2\pi x}{a}) + \gamma\sin(\frac{3\pi x}{a})\&c.$ qui donne selon lui l'allure de la corde à chaque instant[50]. Tout au long de son mémoire, il appuie son raisonnement sur des expériences avec des instruments de musique.

De son point de vue, Daniel Bernoulli pense avoir atteint un niveau de généralité optimal puisqu'il affirme que les courbes trouvées par Euler et D'Alembert doivent être comprises dans sa solution et que, si d'aventure elles ne l'étaient pas, elles ne pourraient décrire les vibrations de la corde. Il pense ainsi avoir exposé « ce que les nouvelles vibrations de M^rs^ D'Alembert & Euler ont de physique »[51].

Dans son second mémoire, D. Bernoulli étudie les vibrations d'une corde sans masse chargée de deux, puis trois et n corps pesants. Ayant appliqué une approche similaire à plusieurs reprises dans le *Traité de Dynamique* et dans *HAB* année 1747[52], D'Alembert ne manquera pas de relever dans son Mémoire 1 (p. 52) la phrase dans laquelle D. Bernoulli prétend accomplir quelque chose de parfaitement nouveau[53].

L'intervention d'Euler dans HAB année 1753

Soulignant les mérites des explications physiques de D. Bernoulli, Euler entreprend d'abord de montrer dans les premiers articles de son mémoire E213 [54] que contrairement à ce que pense ce dernier, toutes les courbes représentant la corde pendant son mouvement ne sont pas forcément comprises dans l'équation $y = \alpha\sin(\frac{\pi x}{a}) + \beta\sin(\frac{2\pi x}{a}) + \gamma\sin(\frac{3\pi x}{a})\&c.$. Puis, à propos de la restriction sur les fonctions admissibles opérée par D'Alembert dans *HAB* année 1750, il explique qu'en définitive la position de l'encyclopédiste peut être assimilée à celle de D. Bernoulli[55]. Il se propose ensuite d'« assurer mieux » sa solution et reprend donc la mise en équation du problème et la résolution de l'équation aux dérivées partielles associée. Il conclut à propos de la courbe initiale :

> « Les différentes parties semblables de cette courbe ne sont donc liées entr'elles par

[48] *HAB* année 1753, p. 148.

[49] Pour H. Burkhardt, en prétendant s'inspirer de Taylor comme il le fait, D. Bernoulli attribue au savant anglais une théorie bien plus développée que celle que celui-ci détenait en réalité.

[50] *HAB* année 1753 (1750), p. 157. α, β, γ &c. sont des fonctions du temps.

[51] *HAB* année 1753 (1755), p. 158.

[52] *HAB* année 1747 (1750), p. 246-247.

[53] *HAB* année 1753 (1755), p. 174.

[54] *HAB* année 1753 (1755), p. 196-201.

[55] D'Alembert s'en défendra dans le Mémoire 1 des *Opuscules* (p. 37-38).

> aucune loi de continuité, & ce n'est que par la description, qu'elles sont jointes ensemble. Par cette raison, il est impossible, que toute cette courbe soit comprise dans quelque équation, à moins que par hazard la figure ADB ne soit telle, que sa continuation naturelle entraine toutes les autres parties réïtérées... »[56]

Euler n'entend donc imposer aucune restriction à la courbe initiale.

Le manuscrit de D'Alembert de 1755

En réaction aux critiques d'Euler et de Daniel Bernoulli, D'Alembert soumet le 6 novembre 1755 à l'Académie de Berlin un mémoire intitulé « Observations sur deux Mémoires de MM. Euler et Daniel Bernoulli, insérés dans les Mémoires de 1753 »[57]. S'ensuit un échange épistolaire tumultueux avec le secrétaire de l'Académie, Samuel Formey, et le mémoire jugé trop polémique est refusé et renvoyé à D'Alembert. Ce dernier en propose alors une version légèrement modifiée en février 1757, mais sans succès. Seul un « Extrait » de la lettre de D'Alembert du 4 février est publié[58], dans lequel il déclare :

> « je consens volontiers que ma réponse ne paroisse dans ce Volume, auquel elle étoit destinée, sauf à publier ailleurs, si je le juge à propos, les remarques importantes que je crois avoir faites sur cette matière. »

Toutefois, le manuscrit en tant que tel restera inédit, même s'il constitue une première version du Mémoire 1 des *Opuscules*.

Sur le plan du contenu scientifique, ce manuscrit est d'ailleurs bien moins élaboré et moins riche que le Mémoire 1, comme nous allons le voir au chapitre suivant. Il s'illustre en revanche par les revendications systématiques de priorité de la part de l'encyclopédiste[59] et par le ton incisif qu'il emploie à l'égard d'Euler. Ces deux aspects disparaîtront ou plutôt s'atténueront dans le Mémoire 1.ce manuscrit fait suite

3. Conclusion

Comme nous l'avons dit dans le chapitre 1, les deux premiers mémoires de

[56] *HAB* année 1753 (1755), p. 217.

[57] Inédit daté du 4 novembre 1755 (Mss I-M6 et I-M7, Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften), et publié dans *O.C.*, vol. I/4b. La rédaction de ce texte n'a pu débuter qu'après le 25 avril 1754, car c'est à cette date qu'Euler présente le mémoire E213 qui suscite la réaction de l'encyclopédiste.

[58] « Extrait d'une lettre de M^r^ D'Alembert à M^r^ Formey du 4 février 1757 », *HAB* année 1755 (1757), p. 401-402.

[59] Du point de vue des revendications de priorité, le manuscrit de 1755 fait suite à un autre texte daté de 1752, resté également inédit et intitulé « Observations sur quelques mémoires, imprimés dans le volume de l'Académie de 1749 » (*O.C.*, vol. I/4a, texte n°4). Soumis à l'Académie de Berlin, ce mémoire était destiné à répliquer à trois mémoires d'Euler parus dans le recueil de 1749. D'Alembert y réclamait la paternité de plusieurs résultat. Euler ne lui ayant donné entre temps que partiellement satisfaction, il réédite certaines de ses demandes dans le manuscrit de 1755.

D'Alembert sur les cordes vibrantes constituent un sujet bien balisé, et étudié par bien des historiens. Il n'en va pas de même du manuscrit de 1755 qui est certes évoqué par R. Taton et A. Youschkevitch dans l'apparat critique de la correspondance d'Euler[60], mais mérite un examen plus attentif. C'est pourquoi, nous nous y attarderons un peu dans le chapitre suivant.

Ceci étant, certains points négligés par l'historiographie méritent d'être signalés[61]. Tout d'abord, la relation à laquelle nous avons fait allusion entre ces mémoires et les réflexions de D'Alembert sur l'Acoustique et les théories de la Musique doit être éclaircie, car, rappelons-le, les *Elémens de Musique* sont publiés en 1752. Il semble également indispensable d'établir une chronologie fine de la genèse des deux textes de D'Alembert apportant une contribution significative à la théorie des EDP : les *Réflexions sur la cause générale des vents*, et le mémoire sur les cordes de *HAB* année 1747. La question du lien que lui-même fait entre les deux doit aussi être posée, et nous tenterons de donner des éléments de réponse en partie II lorsque nous évoquerons le mémoire 26 des *Opuscules*.

---

[60] *Leonhard Euler Correspondance*, *Opera Omnia*, série IV A, vol. 5, 1980.

[61] Notamment en vue de la publication du volume I/4b des *Oeuvres Complètes* de D'Alembert rassemblant les trois mémoires évoqués ci-dessus.

Chapitre 3 : Le Mémoire 1 des Opuscules

A partir de 1761, D'Alembert, en mauvais termes avec les Académies de Paris et de Berlin, adopte un nouveau mode de publication de ses recherches : les *Opuscules Mathématiques*. Le Mémoire 1 inaugure une longue série de 59 mémoires répartis en 9 tomes, dont 8 ont été publiés.

Du point de vue des contributions de D'Alembert à propos du problème des cordes vibrantes, le Mémoire 1 constitue sa troisième intervention majeure publiée[62]. Son objectif est avant tout de réfuter les attaques d'Euler et de Daniel Bernoulli parues dans les mémoires de l'Académie de Berlin (*HAB*) pour l'année 1753[63]. Comme nous l'avons dit au chapitre précédent, il avait soumis en 1755 à la même Académie une version préliminaire de cette réponse. Mais ce manuscrit était resté inédit, et le Supplément achevant le Mémoire 1 et marquant l'entrée en scène de Lagrange en était bien sûr absent. Comme nous le verrons, la rédaction de ce Mémoire 1 se déroule sur une période assez longue allant de 1753 à 1759.

1. Structure et rédaction du Mémoire 1

Pour éclaircir la chronologie de la rédaction du Mémoire 1, il nous faut le comparer au manuscrit de 1755 que nous évoquions, afin de distinguer ce qui était plus ou moins prêt en 1755 des nouveautés de 1761. Observons tout d'abord la structure générale du Mémoire 1 :

- §.I-§.IV : Introduction, retour sur la mise en équation, résolution, évocation des polémiques. Problèmes corollaires de la corde d'épaisseur inégale et de la lame vibrante.
- §.V-§.XXIII : Discussion autour de la solution proposée par Euler.
- §.XXIV-§.XVIII : Polémique avec Daniel Bernoulli notamment sur la possibilité d'exprimer toute fonction sous la forme $y = \alpha \sin(\dfrac{\pi x}{a}) + \beta \sin(\dfrac{2\pi x}{a}) + ...$
- Supplément : Commentaires sur le mémoire de Lagrange dans le 1$^{\text{er}}$ tome des *Mélanges de Turin*.

Si l'on effectue maintenant une comparaison avec le manuscrit de D'Alembert

[62] Nous omettons l'article CORDES (vibrations des) de l'*Encyclopédie* (t. IV, 1754, p. 210) dans lequel D'Alembert se contente d'un rappel sommaire de l'histoire du problème jusqu'à son intervention de *HAB* année 1750, et l'article FONDAMENTAL (t. VII, p. 54b-57b, 1757) dans lequel il revient sur certains aspects de sa polémique avec Daniel Bernoulli.

[63] L. Euler : « Remarques sur les mémoires précedens de M. Bernoulli », *HAB* année 1753 (1755), p. 196-222 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 10, p. 233-254 (E213). D. Bernoulli : « Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 & 1748 », et « Sur le mélange de plusieurs especes de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans une même système de corps », *HAB* année 1753 (1755), p. 147-172 et p. 173-195 ; *Werke*, Bd. 6.

de 1755, on aboutit au résultat suivant :

Passage du Mémoire 1	Lien avec un passage du manuscrit de 1755
§.I-§.IV	non.
§.V-§.VI	oui, proches de l'art. IV.
§.VII-§.XX	non, seuls quelques morceaux du §.VII ressemblent à des passages de l'art. IV.
§.XXI-§.XXII	oui, reprise littérale de l'essentiel des art. V et VI.
§.XXIII	oui, partiellement inspiré de la fin de l'art. VI.
§.XXIV	oui, fortement inspiré de l'art. VII.
§.XXV	oui, reprise littérale de l'art. VIII.
§.XXVI	oui, reprise littérale de l'art. IX, légèrement développée.
§.XXVII	oui, le premier tiers est la reprise littérale de l'art. X.
§.XXVIII	oui, la première moitié est très proche de l'art. XI.
Supplément	non.

On constate donc, sur l'ensemble du mémoire, que c'est la réponse à Daniel Bernoulli qui a subi le moins de changements depuis 1755. On remarque certes des ajouts, mais pour l'essentiel le contenu est semblable, ce qui montre que cette partie du Mémoire 1 a été essentiellement écrite entre avril 1754 et novembre 1755. Pour le reste, les sections §.I à §.IV sont nouvelles mais elles sont en partie des rappels nécessaires car ce texte n'est pas publié dans le même recueil que les précédents (*HAB*). La réponse à Euler qui représente près de la moitié du Mémoire 1 est, elle, considérablement remaniée et bien plus riche que dans le manuscrit de 1755. Ces passages ont donc été essentiellement rédigés entre 1756 et début 1759. Quant au Supplément dans lequel D'Alembert répond au mémoire de Lagrange, il est écrit après septembre 1759 comme lui-même le signale p. 65.

2. Contenu du Mémoire 1

Avant de présenter les grands axes du Mémoire 1, penchons-nous sur ses deux premières sections afin de poser le problème. Dans le §.I, D'Alembert reprend la mise en équation des oscillations de la corde et aboutit à l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ dont il entreprend la résolution. Comme dans *HAB* année 1747, il utilise dans cette étape un critère énoncé par Euler au début des années 1730 assurant l'équivalence entre $\frac{da}{dx} = \frac{db}{dt}$ et le fait que $adt + bdx$ soit une différentielle exacte. Ensuite, il introduit au §.II les conditions aux limites et les conditions initiales correspondant à celles d'une corde pincée (vitesse initiale nulle). Il obtient la solution $y = \phi(x+t)+\phi(x-t)$ avec 2ϕ, impaire et $2a$-périodique[64]. Pendant tout le Mémoire 1, il va se concentrer sur le cas de la corde pincée, à la différence de ses précédents mémoires.

[64] a est la longueur de la corde.

L'élaboration de la notion de saut de courbure

Le réfutation du mémoire E213 d'Euler occupe près de 30 pages du Mémoire 1 (p. 14-42). Le coeur de leur polémique concerne toujours les fonctions 2ϕ, représentant la figure initiale de la corde, qui sont prolongées sur l'ensemble des réels par imparité et $2a-$périodicité. Depuis *HAB* année 1750, D'Alembert rejette les fonctions changeant d'expression, et il défend également cette position dans le manuscrit de 1755. Même si on retrouve cette idée dans le Mémoire 1, le savant emprunte un chemin plus indirect pour y parvenir. Dans un premier temps, il va exclure les fonctions dont la courbe fait des « sauts de courbure », sans évoquer leur expression. Cette distinction se révèlera importante plus tard vers 1780 lorsque D'Alembert dissociera l'absence de sauts de l'invariance de l'expression.

Quoiqu'il en soit, le terme de « saut de courbure » est absent du manuscrit de 1755, et la notion correspondante n'émerge pas encore. Tout juste trouve-t-on quelques vagues prémices. Sur ce point, il y a donc une différence qualitative très nette entre les deux textes, le Mémoire 1 étant bien plus élaboré.

De plus, l'exigence d'absence de « sauts de courbure » est plutôt un critère de nature géométrique. D'Alembert prend ainsi le contrepied d'Euler qui lui opposait jusque là une approche géométrique peu soucieuse de ses préoccupations sur l'expression des fonctions.

C'est une spécificité de la démarche de D'Alembert, désapprouvée explicitement par Euler, qui va le conduire à rejeter les « sauts de courbure ». Il conserve toujours à l'esprit les différentes aspects du problème des cordes vibrantes : l'EDP, sa solution et la construction géométrique associée, et exige que chacune soit vérifiée. Dans ce contexte, il va présenter deux arguments mathématiques pour exclure les fonctions indésirables :

– Partant d'une figure géométrique, il prouve que si, dit en termes modernes, la courbure de la fonction n'est pas continue[65], l'équation $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ n'est pas satisfaite (§.VII-§.X, p. 17-21).
– Il prend également l'exemple d'une fonction définie sur $[0, a]$ dont la forme varie en 0 et a, et montre que l'EDP n'est pas vérifiée aux points où l'expression change (§.XIII, p. 26-28).

Ces deux situations lui permettent de conclure sans appel au §.XIV (p. 28) :

> « Ainsi la construction de M. Euler n'a pas lieu, toutes les fois que la courbure de la courbe AMB fait un saut en quelque point M, ou qu'elle n'est pas nulle, tant en A, qu'en B. »

Cette position est également étayée par des arguments de nature physique et métaphysique liés à l'indétermination de la force accélératrice $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ en cas de sauts de courbure (§.XI, p. 22-24).

[65] Nous emploierons ici le terme « continu » dans son sens moderne. Mais il faut préciser, qu'à cette époque, pour D'Alembert comme pour Euler, une fonction est continue si elle ne change pas d'expression.

Si on jette un oeil moderne sur la question, on peut reconnaître dans la position de D'Alembert une défense rigoureuse de la notion de solution exacte, même si, dans la pratique, un mathématicien actuel aura souvent recours à des solutions au sens des distributions ou à des méthodes numériques pour traiter une EDP. On peut également apprécier ses réflexions sur les sauts de courbure qui évoquent à la fois la notion de dérivées à droite et à gauche et celle de fonctions de classe C^2, mais nous reviendrons sur ces questions à propos des Mémoires 58 §VI, 59 §VI et 59 §VII, dans le chapitre 5 de cette partie et dans le chapitre 3 de la partie II.

La permanence de la forme

En revanche, un mathématicien moderne serait à juste titre plus dubitatif sur la seconde conclusion de D'Alembert, lorsque celui affirme qu'il faut que les branches successives de la courbe prolongée (AMB, $B\mu a$, Amb...) « so[ie]nt assujetties à une même loi », pour qu'il n'y ait pas de sauts de courbure. On retrouve là un aspect déjà présent dans ses écrits antérieurs et dans les préjugés de son siècle : l'attachement à ce que nous qualifierons de *permanence de la forme*. En réalité, sa position revient à peu de chose près à considérer comme équivalente la notion moderne de continuité, liée à l'absence de « sauts », et la notion de continuité de l'époque relevant de la permanence de la forme. Peut-être inspiré par son exemple du §.XIII, il tente montrer que la première entraine la seconde (§.XV-§.XIX, p. 28-36)[66]. Son invocation des « règles de l'analyse », qui supposent selon lui la permanence de la forme, montre qu'il adopte en fait une position de principe, liée d'ailleurs à une conception plutôt algébrique du calcul différentiel.

Cependant, le processus de maturation de la pensée de D'Alembert mérite qu'on s'y attarde. Ce qui était dans *HAB* année 1750 une simple affirmation sans preuve a été soumis à un examen rigoureux. Il en est ressorti la notion pertinente de saut de courbure et une tentative de caractérisation de cette notion par une propriété portant sur l'expression de cette fonction. Même si cette seconde phase est problématique, il faut toutefois souligner la démarche du savant tentant de relier un critère géométrique (l'absence de sauts de courbure) et un critère formel (la permanence de la forme).

Notre analyse renforce donc celle émise par Burkhardt à l'issue de l'étude du Mémoire 1 :

> « Si, du point de vue de l'analyse d'aujourd'hui, on doit prononcer un jugement sur l'ensemble de ces débats entre d'Alembert et Euler, on ne peut donner entièrement raison ni entièrement tort à aucun des deux. On devra rejeter l'exigence formulée par d'Alembert de limiter l'application de l'analyse, voire le mot et le concept de fonction, à des fonctions indéfiniment différentiables, et la considérer comme une tentative de prescrire arbitrairement des lois au développement de la science ; mais d'autre part on ne pourra non plus suivre la légèreté, pour ne pas dire l'insouciance, avec laquelle Euler applique le calcul différentiel et intégral à des fonctions totalement arbitraires. »

Par ailleurs, l'obligation dans laquelle D'Alembert se trouve de rejeter une cer-

[66] En fait, seule la réciproque est vraie si l'on se cantonne aux fonctions usuelles de l'époque.

taine catégorie de fonctions l'amène à une forme de pessimisme comme en témoigne ce passage du §.XXI (p. 38) :

> « Mais, dira sans doute M. Euler, quelle doit être en général la loi du mouvement de la corde, lorsqu'elle aura au commencement une figure quelconque ? Je réponds, comme je l'ai déja fait ailleurs, que dans plusieurs cas le Problême ne pourra être resolu, & surpassera les forces de l'analyse connue. »

A la même époque, ses recherches du Mémoire 4 sur l'écoulement d'un fluide dans un vase suscitent d'ailleurs chez lui le même état d'esprit pour des raisons semblables[67].

Les tentatives de se rapprocher de la réalité physique

Ce pessimisme est renforcé par le fait que D'Alembert est conscient que sa théorie comme celle d'Euler échouent à rendre compte du phénomène physique. Le constat est dressé §.XXIII (p. 40-42) où il admet notamment que sa théorie ne parvient pas à expliquer la cessation des vibrations au bout d'un certain temps. Mais ne baissant pas les bras, il propose, pour décrire les vibrations de la corde, une EDP alternative (p. 42) tenant compte d'un coefficient de résistance[68]. On peut également interpréter la solution du problème d'une corde non uniformément épaisse qu'il donne au §.III (p. 7-11) comme une volonté de se rapprocher de la réalité physique. Il ne faut pas sous-estimer non plus ici son souhait de relever un défi lancé par Euler et relayé par Daniel Bernoulli[69].

La querelle avec Daniel Bernoulli

La querelle essentielle entre D'Alembert et Daniel Bernoulli dans le débat sur les cordes vibrantes peut se résumer à un point. D'Alembert, comme Euler, rejette la possibilité de développer en général toute fonction en séries trigonométriques, et il conteste en particulier la généralité du développement

$$y(x) = \alpha \sin(\frac{\pi x}{a}) + \beta \sin(\frac{2\pi x}{a}) + ...$$

pour une fonction y impaire et $2a$-périodique. Compte tenu de l'apport de Fourier et de Dirichlet sur cette question et des théorèmes que l'on connaît de nos jours, un lecteur moderne aurait tôt fait de donner tort à Euler et D'Alembert et de les considérer comme d'obscurs conservateurs.

Il faut se garder d'un tel jugement car tant que des définitions claires de l'intégrabilité et des classes de continuité ne sont pas dégagées, on peut difficilement arbitrer en faveur d'un camp ou d'un autre, et il faut évaluer plutôt les motifs qui poussent chacun à défendre sa position. En l'occurrence, les raisons qui conduisent

67 Mémoire 4, « Réfléxions sur les Loix du mouvement des fluides », *Opuscules*, t. I, p. 137-168.

68 D'un point de vue moderne, il n'y a rien d'étonnant à ce que les vibrations ne cessent pas dans un modèle conservatif, et il est pertinent d'essayer d'expliquer l'arrêt de celles-ci par l'intervention d'une résistance dissipatrice d'énergie. D'Alembert ira plus loin dans cette même direction dans le 3ème Supplément du Mémoire 25.

69 Dans *HAB* année 1753, respectivement p. 222 et p. 159.

D. Bernoulli à défendre le développement en séries trigonométriques ne sont pas mathématiques mais plutôt physiques. Sa démonstration est plus séduisante que rigoureuse sur le plan de l'Analyse. En revanche, les arguments donnés par D'Alembert pour rejeter une telle position sont plus élaborés que ceux qu'avance Euler puisqu'il envisage des fonctions relativement sophistiquées comme contre-exemple. Les courbes paramétrées qu'il présente au §.XXIV (p. 43-45) sont certes difficiles à expliciter, mais il semble chercher dans une direction relativement pertinente puisqu'il suggère des courbes comportant des points de rebroussement.

La fin du Mémoire 1 révèle d'autres sujets de discorde entre D'Alembert et Daniel Bernoulli. La section §.XXVII est consacrée à une revendication de priorité concernant le problème d'une corde tendue chargée de deux poids. L'encyclopédiste invoque à cette occasion des méthodes qu'il avait exposées dans le Problème V de son *Traité de Dynamique*. Et dans la section §.XXVIII, D'Alembert conteste l'appréciation d'Euler selon laquelle la théorie de D. Bernoulli expliquerait le sens physique des vibrations de la corde. Il refuse l'idée de superposition des « trochoïdes » qui est, selon lui, fictive car elle suppose des « axes courbes ». De plus, il pense que cette superposition ne peut rendre compte de celle des sons. D'un premier abord, on pourrait estimer que leur dissension tient essentiellement à des définitions différentes du temps de vibration. Mais, en réalité, D'Alembert défend ici implicitement les théories musicales qu'il a développées dans ses *Eléments de Musique*. Pour lui, de telles théories sont fondées sur l'expérience. Elles relèvent de « la physique et non de la pure mathématique » et font appel à ce titre à des « raisonnements d'analogie & de convenance ». De plus, la démonstration de D. Bernoulli implique une infinité de sons partiels derrière le son principal, alors que D'Alembert[70] rejette ceux supérieurs à l'harmonique 5.

L'entrée en scène de Lagrange

Au mois de septembre 1759, D'Alembert reçoit le premier tome des *Mélanges de Turin* paru la même année. Il y découvre un mémoire de Lagrange intitulé « Recherches sur la nature et la propagation du son »[71], dans lequel le savant turinois étudie notamment la question des cordes vibrantes. Son approche consiste à examiner les vibrations d'une corde sans masse chargée de n poids, et à faire tendre n vers l'infini pour en déduire le mouvement d'une corde classique. Il suit en cela une méthode qui avait été déjà décrite par D'Alembert dans *HAB* année 1747 (p. 245-247), mais son objectif est tout autre comme en témoigne sa conclusion au Chapitre V :

> « Voilà donc la théorie de ce grand Géomètre [Euler] mise hors de toute atteinte et établie sur des principes directs et lumineux, qui ne tiennent en aucune façon à la loi de

---

[70] Cf. « D'Alembert théoricien de la musique : empirisme et nature », Patrice Bailhache (http ://patrice.bailhache.free.fr/thmusique/d'alembert.html, 27/03/07). D'Alembert polémique également avec D. Bernoulli sur ce sujet dans l'article FONDAMENTAL de l'*Encyclopédie* (t. VII, p. 54b-57b, 1757).

[71] *Mélanges de Turin*, t. I, 1759, p. 1-112 ; *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 39-148.

> continuité que demande M. D'Alembert ; voila encore comment il peut se faire que la même formule qui a servi pour appuyer et démontrer la théorie de M. Bernoulli sur le mélange des vibrations isochrones, losque le nombre des corps mobiles était fini, nous en dévoile l'insuffisance dans le cas où le nombre de ces corps devient infini. »

En effet, grâce à cette méthode, Lagrange a évité une dérivation en x, ainsi que les problèmes qui y sont liés[72]. La réponse de D'Alembert dans le Supplément va consister à mettre le doigt sur certaines négligences et erreurs de calcul commises par Lagrange dans son passage à la limite. Bien qu'elles soient de nature assez technique, les objections de D'Alembert sont plutôt pertinentes comme s'accordent d'ailleurs à la reconnaître Burkhardt et Truesdell. Elles annoncent également plusieurs questions qui seront développées dans des mémoires ultérieurs comme le Mémoire 25, notamment concernant l'usage de séries divergentes.

3. Conclusion

Les nouveautés du Mémoire 1

Les réflexions de D'Alembert concernant les sauts de courbure, ainsi que ses réticences à l'égard de la possibilité de développer une fonction en séries trigonométriques sont les points qui constituent l'intérêt essentiel de ce Mémoire 1.

Il faut également signaler une tendance générale qui prend forme à l'époque, et que le Mémoire 1 illustre. En effet, les travaux suivants de D'Alembert et Euler seront de nature plus exclusivement mathématique, et on assiste à une dissociation entre l'aspect physique cher à D. Bernoulli et l'aspect mathématique du problème, qui seront le plus souvent traités dans des mémoires différents. Toutefois, D'Alembert suivra cette tendance mais ne la précédera généralement pas. Prenons un exemple. Une des forces reconnues de son premier texte sur les cordes vibrantes (*HAB* année 1747) est son caractère physico-mathématique dans la mesure où le savant découvre une application à un outil, les EDP, qui en était jusque là dépourvu et qui n'était pas vraiment dégagé mathématiquement. Dans le Mémoire 1, on retrouve cette imbrication physico-mathématique dans les raisons qui motivent le rejet des sauts de courbure. Plus tard encore, dans le Second Supplément du Mémoire 25, on retrouve des considérations très physiques dans les arguments de D'Alembert en faveur de l'unicité de la solution d'un problème régi par une EDP.

Un mémoire charnière

Du point de vue de l'ensemble des recherches de D'Alembert sur les cordes vibrantes, le Mémoire 1 est un moment charnière. En dépit des apparences, il fournit une preuve assez construite contre les sauts de courbure et les changements d'expression, dont l'auteur est persuadé de la validité. Dans ses mémoires suivants, celui-ci consacrera par conséquent de nombreuses pages à répondre aux attaques

---

[72] Pour une description détaillée des mémoires de Lagrange, on pourra consulter l'étude de H. Burkhardt évoquée précédemment (plus particulièrement p. 27-43 de *Jahr. Deutsch. Math. Verein.*, t. X-2, 1908) qui est traduite en français en annexe.

sur des points particuliers, ou à signaler les nouvelles réflexions qui lui viennent à l'esprit. La structure de ces textes sera de ce fait beaucoup plus décousue. Néanmoins, les positions de l'encyclopédiste ne resteront pas figées dans cette période comme nous le verrons au chapitre 5.

Réception et phase ultérieure

Bien qu'il ait été souvent négligé par les historiens, le Mémoire 1 a été lu par les savants contemporains, et il a ainsi alimenté les recherches de Lagrange, Euler et Daniel Bernoulli. Il a effectivement des répercussions sur les recherches de Lagrange parues dans le tome II des *Mélanges de Turin*, et notamment sur celles d'Euler et D. Bernoulli publiées dans *HAB* année 1765.

Chapitre 4 : Le Mémoire 25

Publié en 1768 dans le t. IV des *Opuscules*, le Mémoire 25 fait suite au Mémoire 1 des *Opuscules*[73]. Avec ses trois suppléments, il aborde des sujets disparates dont certains n'ont qu'un lien très indirect avec la vibration des cordes. Il illustre bien en cela le mode de rédaction de plus en plus désordonné des *Opuscules*, fait d'une accumulation progressive de manuscrits. Néanmoins, comme nous allons le voir, les divers thèmes évoqués par D'Alembert dans ce mémoire ont pour point commun de donner à la discussion une tournure de plus en plus mathématique au détriment des considérations physiques associées au problème.

1. Du Mémoire 1 au Mémoire 25

Conflit avec Daniel Bernoulli

Si l'on se penche sur les faits marquants du débat sur les cordes vibrantes entre les publications des Mémoires 1 et 25, c'est-à-dire entre 1761 et 1768. On observe d'abord que la rancoeur entre D'Alembert et Daniel Bernoulli persiste au cours de cette période. Les relations entre les deux savants ne s'améliorent pas. Mais, les cordes vibrantes ne jouent qu'un rôle indirect dans leur querelle qui est centrée sur les probabilités et l'inoculation. D'ailleurs, lorsque Daniel Bernoulli soumet à l'Académie Royale des Sciences le 4 décembre 1762 un mémoire intitulé « Recherches physiques, mécaniques et analytiques sur le son & les tons des tuyaux d'Orgues différemment construits »[74], il en profite pour se plaindre du Mémoire 11 des *Opuscules*[75] concernant l'inoculation, dans lequel D'Alembert l'a attaqué. L'encyclopédiste lui répond au cours de la séance suivante de l'Académie. Sur le fond, le mémoire soumis par Daniel Bernoulli concerne la propagation du son dans les instruments à vent, et aborde essentiellement la question sous un angle physique et expérimental, qui intéresse peu l'encyclopédiste. Son seul impact sur le Mémoire 25 (fin du premier Supplément) est lié à quelques notes de bas de page s'adressant à D'Alembert sans le nommer.

Reprise du dialogue avec Euler

Pour ce qui est des relations entre D'Alembert et Euler, on assiste en revanche à une forme de réconciliation. Au cours de l'été 1763, D'Alembert séjourne à Potsdam où il a été invité par Frédéric II, et rencontre pour la première fois Euler en personne du 13 au 15 juillet. Suite à cet événement, leur correspondance va re-

[73] *Opuscules*, t. I, p. 1-73 ; *O.C.*, vol. III/1.

[74] *MARS* année 1762 (1764), p. 431-485.

[75] t. II, p. 26-95 ; *O.C.*, vol. III/2.

prendre après presque 12 ans d'interruption[76]. Dans cette nouvelle phase de leurs échanges épistolaires, le problème des cordes vibrantes va tenir, de juillet 1763 à juin 1764, une place bien plus importante qu'avant 1751. La longue lettre d'Euler du 20 décembre 1763 en témoigne. Leurs discussions auront une influence considérable sur le contenu du Mémoire 25 (Supplément 1) dans lequel elles sont fréquemment mentionnées. Elles concernent essentiellement les fonctions admissibles comme figure initiale de la corde, et évoquent plusieurs situations litigieuses : lignes brisées, sauts de courbure, tangentes verticales. On observe d'ailleurs une légère évolution des positions des deux savants dans cette période.

Néanmoins, un désaccord va subsister comme en témoignent leurs mémoires ultérieurs sur le sujet, et leurs relations vont se détériorer à nouveau début 1765 suite à la parution du tome III des *Opuscules* et à une controverse sur l'Optique[77].

Le second volume des Mélanges de Turin

La correspondance entre D'Alembert et Lagrange a débuté en septembre 1759 lorsque l'encyclopédiste a reçu le premier volume des *Mélanges de Turin* en septembre 1759. Dans le Supplément du Mémoire 1, il a réagi aux recherches de Lagrange sur les cordes vibrantes parues dans cette revue[78] en pointant quelques négligences et erreurs de calcul dans un passage à la limite.

Suite à cela, Lagrange envoie à D'Alembert, le 1er juin 1762, le second volume des *Mélanges de Turin*, dans lequel se trouvent deux mémoires abordant les cordes vibrantes[79]. Dans le premier, intitulé « Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son »[80], c'est le chapitre II qui y est consacré. Lagrange adopte une démarche différente de celle employée dans ses précédentes recherches. Il renonce en effet momentanément au modèle du fil chargé de n poids et considère l'équation aux dérivées partielles régissant les vibrations, $\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2}$, qu'il tente d'intégrer par une méthode alternative à celle d'Euler et de D'Alembert. Il a en effet recours à un facteur intégrant, alors que les deux savants utilisaient plutôt des différentielles exactes. Il parvient à la même formule que ces derniers, mais en tire une conclusion encore favorable à Euler comme il l'annonçait déjà dans l'introduction de ce chapitre II :

> « ...on voit la nécessité d'admettre dans ce calcul d'autres courbes que celles que les

---

[76] *Leonhard Euler Correspondance Briefwechsel*, *Opera Omnia*, série IV A, vol. 5, 1980, édité par A.P. Juskevic et R. Taton, Birkhaüser.

[77] Sébastien Matte : *Autour d'une polémique entre D'Alembert et Euler sur les aberrations optiques dans les années 1760*, mémoire de DEA « Construction des savoirs scientifiques », Université Lyon 1, 2002.

[78] Lagrange : « Recherches sur la nature, et la propagation du son », *Mélanges de Turin*, t. I, 1759, p. 1-112 ; *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 39-148.

[79] Pour une étude plus détaillée des mémoires de Lagrange, voir H. Burkhardt « Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration des Differentialgleichungen der mathematischen Physik », *Jahr. Deutsch. Math. Verein.*, t. X-2, 1908, p. 27-43 (traduit en français en annexe).

[80] *Mélanges de Turin*, t. II, p. 11-172 ; *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 151-316.

> Géomètres ont considérées jusqu'à présent, et d'employer un nouveau genre de fonctions variables indépendantes de la loi de continuité, et qu'on peut très-bien appeler fonctions irrégulières et discontinues. »[81]

Néanmoins, comme il le signale à l'art. 31 du Mémoire 25 (p. 152-153), D'Alembert fait peu cas de ce texte de Lagrange.

Evoquons maintenant le second mémoire du savant turinois intitulé « Addition à la première partie des recherches sur la nature & la propagation du son imprimées dans le volume précedent »[82], et destiné spécifiquement à D'Alembert. Lagrange réagit d'abord aux critiques de ce dernier à propos de son passage à la limite dans le problème d'un fil chargé de n poids. Comme le remarque H. Burkhardt, les objections de D'Alembert sont néanmoins fondées et les réponses de Lagrange insuffisantes. Ensuite, le savant turinois s'en prend à certains passages du Mémoire 1 et défend Euler en revendiquant la possibilité d'admettre des courbes initiales faisant des « sauts de courbure ». Dans la trentaine de pages du Mémoire 25 précédant les Suppléments, D'Alembert se livre à une étude scrupuleuse de ce texte et fournit à son tour des réponses détaillées aux objections de Lagrange.

Intensification des échanges avec Lagrange

Après cet épisode et suite au voyage de Lagrange à Paris de novembre 1763 à juin 1764, les échanges entre les deux savants vont devenir plus réguliers. Le problème des cordes vibrantes occupe d'ailleurs une place prépondérante dans leur correspondance au cours des années 1764 et 1765, puisqu'il est discuté dans les six lettres connues échangées entre le 16 octobre 1764 et le 20 mars 1765. Le sujet central de leur conversation concerne toujours les fonctions décrivant l'allure initiale de la corde et les « sauts » éventuels de leurs dérivées.

Grâce à cette intensification de leur correspondance, la position de Lagrange va se rapprocher de celle de D'Alembert, et l'encyclopédiste va publier en 1766 un mémoire sous forme de lettres factices dans le troisième volume des *Mélanges de Turin*. Dans ce texte intitulé « Extrait de différentes lettres de M. D'Alembert à M. De la Grange écrites pendant les années 1764 & 1765 »[83], le paragraphe V est consacré au problème des cordes vibrantes. D'Alembert s'y félicite d'ailleurs de l'évolution des points de vue de Lagrange :

> « Je suis charmé que nous soyons enfin presque absolument d'accord sur le problème des cordes vibrantes. Vous avez reconnu, suivant ce que vous me dites, que la solution ne peut avoir lieu, comme je le prétendois, si les branches alternatives ne sont pas assujetties à la loi de continuité ; vous y mettez seulement une restriction, la solution ne peut avoir lieu, selon vous, si la courbe initiale n'est assujettie à aucune équation pourvu que dans cette courbe $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne fasse de saut nulle part dans la courbe initiale, ni dans les branches alternatives. »

[81] *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 158. Les fonctions discontinues en question sont des fonctions changeant d'expression sur leur ensemble de définition.

[82] *Mélanges de Turin*, t. II, p. 323-336 ; *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 319-332.

[83] *Mélanges de Turin*, t. III, p. 381-396.

Le rapprochement de leurs positions a en fait commencé au début de l'année 1764 comme en témoigne la lettre de D'Alembert à Euler du 16 mars où il confie que Lagrange lui « paroit fort ébranlé par les objections [qu'il lui] a faites ». Il est scellé définitivement par la lettre de Lagrange à D'Alembert du 26 janvier 1765.

Pour revenir au mémoire de D'Alembert dans le t. III des *Mélanges de Turin*, insistons sur un éclaircissement qu'il donne au détour d'une phrase à propos de la définition d'un « saut ». Pour lui, un « saut » se produit lorsqu'une fonction passe

> « brusquement du fini à l'infini, ou de l'infini au fini, ou d'une valeur finie à une autre valeur finie. »

Cette précision n'est pas sans intérêt pour la compréhension de certains passages du Mémoire 25, car elle implique qu'une situation où l'on a une asymptote verticale ne correspond pas dans son esprit à un « saut ». Accessoirement, elle permet aussi à l'équivalence entre permanence de la forme et absence de sauts de courbure de ne pas se briser trivialement.

Le troisième volume des Mélanges de Turin

D'Alembert n'est pas le seul à intervenir sur le problème des cordes vibrantes dans le troisième volume des *Mélanges de Turin*. Dans un long mémoire intitulé « Solutions de différens problèmes de Calcul intégral »[84], Lagrange aborde à plusieurs reprises le sujet dans des passages[85] qui rendent assez bien compte de sa correspondance avec D'Alembert. Il nous faut ajouter ici que d'autres aspects de ce mémoire de Lagrange ont un impact sur le tome IV des *Opuscules*, comme on peut le voir notamment dans le Mémoire 26.

Enfin, Euler publie également deux mémoires sur les cordes vibrantes dans ce recueil, intitulés respectivement « Eclaircissemens sur le mouvement des cordes vibrantes » et « Recherches sur le mouvement des cordes inegalement grosses »[86]. Dans le premier, il donne un exposé structuré d'une grande clarté, mais n'apporte rien de très nouveau et réaffirme pour l'essentiel ses positions face à D'Alembert. Dans le second, il fait appel à l'EDP $\dfrac{ddy}{X dx^2} = \dfrac{ddy}{dt^2}$ établie dans *HAB* année 1753 (p. 222) que D'Alembert avait examiné dans le Mémoire 1 et propose de nouvelles solutions particulières.

Les mémoires publiés en 1767

L'année suivante, en 1767, paraît dans *HAB* année 1765 un mémoire Daniel Bernoulli[87] dans lequel celui-ci se penche également sur le problème des cordes d'épaisseur non uniforme. Un mémoire d'Euler figure aussi dans ce recueil[88]. Ces

---

[84] *Mélanges de Turin*, t. III, 1766, p. 179-380 ; *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 471-668.

[85] Avec la pagination du t. I *Oeuvres de Lagrange*, les passages concernés se trouvent p. 514-516, p. 520-554.

[86] *Mélanges de Turin*, t. III, p. 1-59 ; *Opera Omnia* série II, vol. 10, p. 377-425 (E317 & 318).

[87] D. Bernoulli : « Mémoire sur les vibrations des cordes d'une épaisseur inégale », *HAB* année 1765 (1767), p. 281-306.

[88] « Sur le mouvement d'un corde, qui au commencement n'a été ébranlée que dans un partie »,

textes n'auront pas d'impact sur le Mémoire 25 car le tome IV des *Opuscules* était déjà prêt dans sa version définitive lorsque D'Alembert a pris connaissance de *HAB* année 1765. L'encyclopédiste n'a donc pu réagir qu'après, dans le recueil *HAB* année 1763, publié en 1770[89].

2. Structure et rédaction du Mémoire 25

Structure générale du mémoire

Afin de rendre compte du caractère hétérogène du Mémoire 25, récapitulons d'abord sa structure générale :

Mémoire 25

- art. 1-31 : Réponse au mémoire de Lagrange, « Addition à la première partie des recherches... », paru dans le 2nd volume des *Mélange de Turin* (1762) : problèmes de passage à l'infini et de convergence de séries, nécessité de l'absence de sauts de courbure, problèmes liés à la méthode de dérivation et aux points anguleux.
- art. 32 : Remarque sur la polémique avec Daniel Bernoulli.

Premier Supplément

- art. 1-15 : Polémique avec Daniel Bernoulli sur la valeur de la somme d'une série, condamnation de l'approche probabiliste.
- art. 16-38 : Discussion à partir de la lettre d'Euler du 20 décembre 1763 sur le cas des tangentes verticales et le cas où la courbure est ponctuellement infinie.
- art. 39-44 : Polémique avec Daniel Bernoulli, notamment à propos des *MARS* année 1762 : cordes chargées de n poids, hypothèses physiques.

Second Supplément

- art. 1-5 : Problème d'une corde dont on lâche les extrémités à l'instant initial, défense de la permanence de la forme pour les fonctions.
- art. 6-31 : Remarques liées à la correspondance avec Lagrange et portant sur les recherches de ce dernier dans le 3ème volume des *Mélanges de Turin* (continuité des dérivées $n^{\text{èmes}}$, développements des fonctions en séries, puissances fractionnaires). Evocation de la polémique avec Euler.

Troisième Supplément

- art. 1-2 : Discussion sur ce que la résolution du problème des cordes vibrantes parvient et échoue à expliquer.
- art. 3-73 : Tentative de rendre compte de la cessation des vibrations. Considération de différents types de forces de résistance : proportionnelle à la vitesse (art. 3-7), fonction de x (art. 8-73). Résolution des EDP associées.

Cet aperçu du plan du mémoire montre déjà que comparativement au Mémoire

---

id., p. 307-334 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 10, p. 426-451 (E339).

[89] L'écart de date entre 1763 et 1770 est dû au retard dans les publications accumulé pendant la Guerre de 7 ans (1756-1763).

1, Lagrange a acquis une place bien plus importante, comparable à celles d'Euler et de D. Bernoulli. Examinons maintenant les phases de rédaction du Mémoire 25

Rédaction

La rédaction du Mémoire 25 se déroule sur une longue période. Elle débute en 1762, aux alentours de la réception par D'Alembert du 2nd volume des *Mélanges de Turin* vers le milieu de l'année. Il est cependant fort probable qu'elle ait commencé un peu plus tard car, dans sa lettre à Lagrange du 15 novembre 1762, D'Alembert confesse ne pas avoir encore parcouru ce recueil.

Pour éclaircir les différentes périodes de rédaction, nous proposons la synthèse suivante :

Passage du Mémoire	Période de rédaction	Eléments permettant la datation, observations
Mémoire 25, art 1-32	1762-1763	L'affirmation de D'Alembert dans le 1er Supplément selon laquelle ce passage a été écrit en 1762 est contradictoire avec la mention d'une lettre d'Euler de juillet 1763.
Supplément 1	1763-1764	Correspondance avec Euler datée, prise en compte du mémoire de D. Bernoulli soumis en décembre 1762 et publié en 1764.
Supplément 2	1765-1766	Remarque de D'Alembert, mention du t. III des *Mélanges de Turin*, nouvelle rancoeur contre Euler.
Supplément 3	1766-1767 ?	Pas d'indication.

Une des conséquences de l'étalement de cette rédaction est que D'Alembert réagit à des positions de Lagrange très différentes puisque ce dernier change d'avis au cours de cette période. Nous allons maintenant donner par thème une idée plus précise du contenu scientifique du Mémoire 25.

3. Contenu du Mémoire 25

Nouveaux arguments sur les fonctions à exclure

Comme nous l'avons précisé à l'occasion de la présentation du Mémoire 1, il faut distinguer deux niveaux dans la position de D'Alembert concernant les fonctions représentant l'allure initiale de la corde : l'interdiction des « sauts de coubure », et la défense de la permanence de la forme, c'est-à-dire du fait qu'une fonction doit toujours être « assujettie à une même loi ». Même si pendant longtemps il va considérer ces deux points comme équivalents comme il croit le démontrer dans le Mémoire 1 (§XV-§XIX, p. 28-36), nous allons détailler distinctement les arguments qu'il fournit en faveur de chacun d'entre eux dans le Mémoire 25.

D'Alembert revient sur l'interdiction des « sauts de coubure » dans la partie du mémoire qui précède les suppléments et avance les raisons suivantes :

- Lagrange défend les sauts de courbure en se reposant sur un choix arbitraire particulier de l'algorithme de dérivation, ce qui n'est pas permis (art. 12-14).
- Comment définit-on la valeur de la force accélératrice aux extrémités lorsque de tels sauts ont lieu ? De plus, l'immobilité des extrémités confirme que cette force doit être nulle en ces points (art. 14-20).
- Les fonctions faisant des sauts de courbure doivent être exclues au même titre si on admet que celles ayant des points anguleux doivent l'être (art. 22-23).
- Il faut exclure les fonctions avec des points anguleux (art. 24-27).

La plupart de ces arguments sont plutôt pertinents, et certains ressemblent à ceux invoqués dans le Mémoire 1. On retrouve également derrière la notion géométrique de saut de courbure celle de dérivée seconde à droite et à gauche, et, d'une certaine façon aussi, le concept moderne de discontinuité appliqué à la dérivée seconde. Mais, les réflexions sur l'algorithme de dérivation vont plus loin. Elles supposent un affinement de la notion de limite sur lequel nous allons revenir.

A l'art. 30, D'Alembert réaffirme l'équivalence entre permanence de la forme et absence de sauts de courbure. Dans le second Supplément, il donne les arguments suivants en faveur de la permanence de la forme :

- Si on autorise la fonction à changer d'expression, on perd l'unicité de la solution dans le problème d'une corde dont on lâche les extrémités à $t = 0$ (art. 1-5, Suppl. 2).
- Comme il faut aussi que l'équation $\dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{d^n y}{dt^2 dx^{n-2}}$ soit vérifiée, on ne peut autoriser un saut sur aucune dérivée n$^{\text{ème}}$ de la fonction représentant la corde à $t = 0$, ce qui n'est possible que si on interdit tout changement de forme (Suppl. 2).

Le second argument relève plus d'une généralisation intuitive, mais le premier est plus délicat à saisir. En réalité, le problème que considère D'Alembert au début du Second Supplément est, d'un point de vue moderne, « mal posé », car les conditions initiales et aux limites associées à l'EDP sont insuffisantes. Il n'y a donc pas de solution unique car la fonction représentant la corde à $t = 0$ est donnée sur un intervalle de la longueur de la corde et n'a plus de raisons d'être impaire et périodique. Mais comme, pour D'Alembert, cette unicité ne fait aucun doute et comme il parvient à la récupérer en interdisant à la fonction de changer d'expression, il s'en sert comme argument pour défendre justement la permanence de la forme.

Réflexions sur les limites

Développons maintenant ce que nous évoquions précédemment concernant la notion de limite. L'article limite de l'*Encyclopédie*[90], dû à l'Abbé de la Chapelle et supervisé par D'Alembert, débute ainsi :

> « On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la premiere plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche, puisse jamais surpasser la gran-

[90] t. IX, p. 542. Cet article est d'ailleurs inspiré de la *Cyclopaedia* de Chambers.

> deur dont elle approche ; ensorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable. »

Pour un lecteur moderne, cette définition peut sembler satisfaisante bien qu'elle impose la monotonie de la « grandeur qui approche ». Cependant, elle n'est pas forcément mise en pratique dans les calculs de limites par D'Alembert comme par ses contemporains. Si l'on regarde par exemple comment ils déterminent la valeur d'une dérivée en un point, on peut faire deux remarques :

- Il n'y a pas vraiment de passage à la limite, dans la mesure où ils manipulent le plus souvent des quotients d'infiniments petits qu'ils simplifient. Or ceci ne fonctionne que lorsque la limite existe et qu'elle est assez élémentaire.
- Il leur arrive fréquemment de spécifier des limites, en oubliant que, pour avoir la limite d'une grandeur lorsque $\epsilon \to 0$, on doit faire tendre ϵ de manière *quelconque*.

Bien qu'il tombe sous le coup du premier point, D'Alembert semble pressentir certains problèmes soulevés dans le second, et se démarque donc de cet état des lieux général. En effet, ses critiques contre Lagrange à propos du choix de l'algorithme de dérivation (art. 12-14, p. 134-138) montrent qu'il saisit que le savant turinois se contente de se pencher sur un cas particulier confortable et qu'il contourne artificiellement la difficulté. Par ailleurs, à l'art. 22 du Supplément 1, il est vigilant sur l'interversion des limites, et fait preuve d'une certaine intuition concernant la notion de limite directionnelle d'une fonction à deux variables.

Exclure et admettre de nouvelles fonctions

D'Alembert exige également dans le Mémoire 25 l'exclusion d'une nouvelle catégorie de fonctions. En effet, les fonctions représentant l'allure initiale de la corde doivent non seulement ne pas faire de sauts de courbure et conserver toujours la même équation, et elles doivent également être privées de tangentes verticales. Il tombe d'ailleurs d'accord avec Euler sur ce point (art. 16, Suppl. 1), même si leurs motivations ne sont pas exactement identiques. De surcroît, D'Alembert hiérarchise les fonctions exclues en fonction des raisons qui expliquent leur rejet (art. 26-27, Suppl. 1). De son point de vue, les courbes dotées de tangentes verticales sont mises à l'index pour des motifs moins importants que les autres – motifs qui de plus ne sont pas mathématiques, mais concernent l'adéquation entre l'EDP et le phénomène qu'elle est supposée décrire.

En tombant d'accord avec D'Alembert sur ces nouvelles fonctions à exclure, Euler infléchit légèrement sa position qui consistait jusque là à ne fixer aucune restriction sur les courbes initiales. Avec le rapprochement de Lagrange, cette évolution semble encourager l'encyclopédiste dans sa façon de voir.

Mais, D'Alembert évolue lui aussi et se montre par certains côtés plus restrictif et par d'autres plus permissif. Dans le Supplément 2 (art. 6), il interdit, en accord avec Lagrange, aux dérivées $n^{\text{èmes}}$ $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ de la fonction représentant l'allure initiale de faire des sauts (d'une valeur finie à une autre), ce qui d'ailleurs n'est pas pour lui une nouvelle exigence car elle est contenue dans la permanence de la forme. Et, dans le Supplément 1 (art. 29), il permet à $\frac{d^2y}{dx^2}$ d'être infinie aux extrémités de la corde à $t = 0$, alors qu'il demandait que cette quantité soit toujours nulle dans le Mémoire 1 et au début du Mémoire 25. Dans le Supplément 2 (art. 21, 23), il autorise également les dérivées $n^{\text{èmes}}$ à être ponctuellement infinies.

D'un point de vue moderne, il serait donc bien difficile de dire si les conditions initiales permises par D'Alembert sont de classe C^2 ou C^∞. Néanmoins, malgré une légère inflexion de sa position, il reste ici scrupuleusement cohérent avec sa définition d'un saut évoquée précédemment[91]. Par ailleurs, le fait que les dérivées d'ordre supérieur à 2 puissent avoir une limite infinie en un point l'amène à envisager des puissances fractionnaires dans ses développements en séries (art. 13-18, Suppl. 2)[92].

C'est ainsi que D'Alembert va ironiquement tenter de se présenter comme moins restrictif qu'Euler comme il l'annonce à l'art. 17 du Supplément 2 :

> « Il me semble donc que le Savant Analiste, qui d'abord avoit étendu la solution de ce problême à toutes les courbes initiales possibles, la restreint trop aujourd'hui en la bornant aux seules courbes initiales dans lesquelles $y = Ax + Bx^3 + Cx^5$,&c. lorsque x est infiniment petite. »

Cessation des vibrations

L'obstination de D'Alembert dans le Troisième Supplément du Mémoire 25 à trouver un modèle expliquant la cessation des vibrations est également digne d'intérêt. Indépendamment du côté calculatoire et de l'aspect répétitif de certaines de ses constructions géométriques dans ce passage, cette volonté peut évoquer à un mathématicien actuel le contrôle des EDP du fait de la tentative d'imposer des conditions finales à la solution.

Toutefois, il nous faut être très prudent et nuancer immédiatement ce propos, car, bien que son intention soit intéressante, l'approche de D'Alembert présente plusieurs types de lacunes. Certaines sont de nature mathématique : à l'art. 7, il généralise à l'infini une conclusion obtenue pour une somme finie. Il semble également commettre une erreur physique en affirmant que si la vitesse et l'accélération s'annulent ponctuellement, la corde s'arrête de vibrer, ce qui n'est pas vrai dans tous les modèles. Néanmoins, il s'en expliquera en 1781 dans le Mémoire 59 §VII. Pour lui, dès lors que vitesse et accélération s'annulent, le mouvement n'est plus régi ni par l'EDP, ni par sa solution et il s'interrompt[93]. Mais, une dernière lacune méthodologique le condamne à l'échec : D'Alembert n'envisage pas que l'amplitude des vibrations puisse tendre vers 0 sans vraiment s'annuler. Cette dernière lacune est regrettable car il ne se rend pas compte qu'il détient une solution de ce type avec un amortissement exponentiel (fin de l'art. 3, Suppl. 3) !

---

[91] Pour lui, une fonction qui tend en l'infini en un point ne fait pas un saut.

[92] Les développements qu'autorise ici D'Alembert font écho aux développements actuels dits de Puiseux.

[93] Son idée est que les forces de résistance figurant dans l'EDP disparaissent lorsque vitesse et accélération s'annulent car elles sont passives.

Un autre point mérite d'être souligné ici. L'oeuvre de D'Alembert est marquée par la prise de conscience progressive qu'une équation différentielle ou une EDP ne représente pas forcément fidèlement le phénomène qu'elle est censée décrire. En somme, elle n'est qu'un modèle. Le Mémoire 25 illustre bien cette évolution avec son troisième Supplément, mais on voit également apparaître des réflexions sur l'adéquation de l'équation au phénomène dans le premier Supplément (art. 26-27).

Convergence incongrue de séries divergentes

Le début du premier Supplément est marqué par une nouvelle polémique avec Daniel Bernoulli. Dans un texte non publié au moment des faits, ce dernier prétend accorder une valeur à certaines séries divergentes dont les sommes partielles sont périodiques, ce que D'Alembert désapprouve. La raison pour laquelle l'encyclopédiste mène cette discussion dans le Mémoire 25 sur les cordes vibrantes tient au fait qu'elle concerne une égalité qu'il a déjà attaquée dans ses objections à Lagrange des Mémoires 1 (Suppl.) et 25 (art. 11) :

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) \ldots = -\frac{1}{2}.$$

Daniel Bernoulli défend la validité de cette égalité à l'aide d'un raisonnement faisant appel aux probabilités. En somme, il considère la valeur des sommes partielles comme une variable aléatoire et assimile la somme infinie à l'espérance de celle-ci. L'invocation des probabilités dans ce contexte est vivement condamnée par D'Alembert. L'encyclopédiste va y substituer un raisonnement plus général qui consiste à déterminer en général la moyenne des sommes partielles. Cette approche, qu'il présente comme plus rigoureuse, est une ébauche de ce que nous appelons les moyennes de Césaro. Mais d'un certain point de vue, on peut estimer qu'il ne fait que présenter différemment ce que fait D. Bernoulli. Toutefois, D'Alembert conteste un autre aspect, plus important, des travaux de ce dernier : l'égalité entre la série et cette moyenne/espérance. Il est ainsi cohérent avec les « doutes et objections » qu'il a émis à propos de l'utilisation des probabilités par D. Bernoulli dans d'autres domaines comme l'astronomie[94] et l'inoculation[95], et sur ce point, on peut considérer ses critiques comme légitimes.

Daniel Bernoulli ne publie que plus tard ses recherches sur les séries divergentes[96]. Est-ce à cause des critiques de D'Alembert, mais il semble qu'il en modifie entre temps la présentation. En effet, le vocabulaire des probabilités est assez peu présent dans son mémoire paru en 1772, contrairement à ce que rapporte D'Alembert du texte qu'il a en main. Néanmoins, la tournure de certains raisonnements reste probabiliste, et D. Bernoulli renforce régulièrement ses preuves en faisant ap-

---

[94] Article INCLINAISON de l'*Encyclopédie*, t. VIII, p. 650b-651b.

[95] Voir notamment le Mémoire 11 (*Opuscules*, t. II, p. 26-95 et *O.C.*, vol. III/2), ainsi que les Mémoires 23 et 27 du tome IV.

[96] « De summatione serierum qurundam incongrue veris earumque interpretatione et usu » (*Nov. Comm. Acad. Petrop.*, t. XVI, 1771 (1772), p. 71-90 ; *Werke*, Bd. II.

pel à des séries entières divergentes dont D'Alembert condamne d'ailleurs également l'utilisation.

4. Mise en perspective du Mémoire 25

Certains passages et aspects du Mémoire 25 méritent d'être recontextualisés par rapport à d'autres textes parus dans le même volume des *Opuscules*[97]. Les questions des développements en séries et de l'étude systématique des EDP que nous abordons ici font appel à un corpus élargi et seront examinées en détails en Partie II.

Développements en séries

A plusieurs reprises dans le Mémoire 25, D'Alembert se montre réticent à l'égard de l'emploi des séries. Selon le contexte, il est amené à mettre le doigt sur trois types de difficultés :

– Le problème de la convergence des séries entières et de leur utilisation lorsqu'elles divergent (art. 6-11).
– Le problème de la généralité du développement en séries trigonométriques (art. 32, Mém. 25 ; art. 39-43, Suppl. 1)
– La généralité et la validité du développement en série entière, dit aujourd'hui de Taylor (art. 18, Suppl. 2).

Concernant le premier point, D'Alembert se situe dans la lignée de Varignon et de Nicolas II Bernoulli dans la mesure où il s'oppose à la manipulation purement formelle des séries. Il refuse en effet avec insistance qu'en Analyse, on manipule formellement des séries entières et qu'on les utilise au sein de raisonnements abstraits sans se soucier de leur convergence. On retrouve d'ailleurs le même type de réflexions concernant ce que nous appellerions le rayon et la vitesse de convergence dans le Mémoire 35 §I[98]. Ses réserves sur cette question situent D'Alembert à contre-courant de savants comme Euler, Daniel Bernoulli et Lagrange[99]. D'un certain point de vue, on peut considérer qu'il a la rigueur de son côté, bien qu'il faille rappeler qu'on découvrira au XIXe siècle tout l'usage qu'on peut faire des séries divergentes.

A propos du second point, l'essentiel a été dit par D'Alembert à l'occasion de sa querelle avec Daniel Bernoulli dans le Mémoire 1, et ses commentaires sur ce sujet se trouvant dans le Mémoire 25 sont assez redondants.

Le troisième point est le plus nouveau dans l'oeuvre de D'Alembert. Il apparaît en filigranes dans le second Supplément, mais est bien plus détaillé au Mémoire 28 où D'Alembert présente certaines situations où le développement traditionnel en séries entières ne s'applique pas à n'importe quelle fonction (28 §I) et peut être

[97] Vol. IV (1768), Mémoires 21 à 29.

[98] *Opuscules*, t. V, p. 171-183 ; *O.C.*, vol. III/5.

[99] Cf. Giovanni Ferraro, « Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815 », *Historia Mathematica*, 34 (2007), p. 62-88.

à l'origine d'erreurs si on l'utilise pour résoudre des équations fonctionnelles (28 §II). Cependant, le passage du Mémoire 25 qui aborde le sujet présente l'intérêt de montrer le lien dans l'esprit de D'Alembert entre les deux derniers points énoncés plus hauts. En effet, les contre-exemples invoqués pour rejeter la généralité des développements en séries entières et trigonométriques sont souvent similaires[100]. Et la constatation de cette non-généralité le pousse à inclure des puissances fractionnaires dans les développements des fonctions représentant l'allure initiale de la corde (art. 12-16, Suppl. 2), ce qui n'est pas sans évoquer les développements de Puiseux. Néanmoins, une autre raison l'amène à considérer des puissances fractionnaires. Sa définition d'un saut lui permet certes de conserver l'équivalence entre permanence de la forme et absence de sauts de courbure, mais, conséquemment, les dérivées d'ordre supérieur à 2 peuvent prendre des valeurs infinies en certains points puisque cela ne correspond pas à un saut, ce qui se traduit par des puissances fractionnaires.

Cette introduction des puissances fractionnaires dans les développements offre également à D'Alembert l'occasion d'affirmer qu'il est devenu moins restrictif qu'Euler dans les fonctions qu'il admet, ce qui est partiellement légitime.

Le Mémoire 26

Le troisième Supplément du Mémoire 25 mérite également d'être mis en perspective par rapport au Mémoire 26[101] qui le suit. Dans ce texte qui aura une certaine postérité, D'Alembert systématise l'étude des EDP dans un cadre purement mathématique sans problématique physique. Les diverses nouvelles EDP rencontrées dans le Supplément en question ont pu, du fait de leur comlexité croissante, incité le savant à procéder à une étude plus générale, fut-elle imparfaite. Nous aborderons cette entreprise de manière plus détaillée dans le chapitre 2B de la Partie II.

Nouveautés du Mémoire 25

D'un point de vue scientifique, l'aspect le plus novateur du Mémoire 25 est sans doute la non-généralité des développements en séries entières. Les questions que soulève D'Alembert à propos de l'algorithme de dérivation et donc de la notion de limite sont également dignes d'intérêt, comme le problème évoqué au début du second Supplément qui pose celui du nombre nécessaire de conditions initiales et aux limites. Ces différents aspects scientifiques ont le plus souvent été ignorés par les historiens, au même titre que le renversement que tente d'opérer D'Alembert dans leur débat qui l'oppose à Euler. Truesdell n'effectue qu'une instruction à charge contre le Mémoire 25 qu'il qualifie d'« accumulation de malentendus et d'assertions

[100] D'un point de vue moderne, on aurait certes plutôt cherché des contre-exemples du côté des fonctions réelles de classe C^∞ non analytiques. Signalons toutefois ici que l'exemple aujourd'hui bien connue de la fonction $e^{\frac{1}{x^2}}$ n'st pas encore envisagé au XVIII^{e}siècle.

[101] Comme les mémoires de D'Alembert sur les cordes vibrantes, ce texte figure en annexe de la thèse. Il a été étudie par Grégory Faye (*Sur les Formes Différentielles, Annotation du Mémoire 26* , Stage de Licence ENS Lyon, Université Lyon 1, juillet 2006).

sans substance et souvent erronées »[102]. Moins partial, Burkhardt juge pertinentes certaines remarques de l'encyclopédiste, mais il se contente d'examiner le Mémoire 25 du point de vue de la discussion avec Lagrange[103].

5. Conclusion

Sur la plan de la démarche, le Mémoire 25, comme d'autres du tome IV des *Opuscules*, reflète une tendance à traiter de manière de plus en plus purement analytique les problèmes physico-mathématiques. Malgré quelques commentaires sur la force accélératrice, les considérations physiques sont encore moins présentes sur l'ensemble du Mémoire 25 que dans le Mémoire 1. Elles ne sont certes pas complètement absentes. On observe notamment une réelle volonté de D'Alembert de trouver des modèles appropriés pour rendre compte des phénomènes physiques. Mais elles ne s'ingèrent plus comme avant sur le terrain de l'Analyse, sauf quand il s'agit de justifier l'unicité d'une solution (art. 1-5, Suppl. 2).

Le Mémoire 25 présente également un intérêt historique, car il est en partie un compte-rendu des échanges épistolaires de D'Alembert avec Euler et Lagrange. Et, comme sa rédaction s'étale sur 5 ans, il permet de percevoir les évolutions de leurs positions et de leurs relations, et reflète le poids de D'Alembert dans le milieu scientifique de l'époque.

Les polémiques sur le problème des cordes vibrantes vont également connaître des développements dans les années qui vont suivre la publication du tome IV des *Opuscules*. L'année 1770 voit notamment la publication du recueil *HAB* année 1763 dans lequel D'Alembert répond aux mémoires de D. Bernoulli et d'Euler parus dans *HAB* année 1765.

Par ailleurs, dans le tome V des *Opuscules* qui paraît la même année que le tome IV en 1768, D'Alembert met à exécution une remarque qu'il avait faite des années auparavant dans *HAB* année 1747 et utilise l'équation pour étudier la propagation du son avec plus ou moins de succès[104].

La dernière phase des recherches de D'Alembert sera marquée par une évolution importante de sa conception de la notion de fonction. Il va en fait renoncer à l'équivalence entre permanence de la forme et absence de sauts de courbure, et il en tirera des conséquences sur le problème des cordes vibrantes.

---

[102] *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, série II, vol. 11, section 2, p. 286-288.

[103] *Jahr. Deutsch. Math. Verein.*, t. X-2, 1908, p. 37-43.

[104] Mémoire 34 §II, « Sur la Vitesse du Son », *Opuscules*, t. V, p. 138-145 ; *O.C.*, vol. III/5.

Chapitre 5 : Le Mémoire 59 §VII

Le Mémoire 59 §VII est la dernière intervention de D'Alembert à propos du problème des cordes vibrantes. Rédigé vers 1781, il était destiné au tome IX des *Opuscules*, mais est resté inédit comme cet ouvrage. L'importance de ce texte apparaît dès les premières lignes où l'on voit l'encyclopédiste changer radicalement de point de vue sur les conditions dans lesquelles le problème peut être résolu. Alors qu'il avait défendu avec acharnement la permanence de la forme pour les fonctions représentant l'allure initiale de la corde, il va renoncer à cette exigence pour développer une nouvelle position qui a été peu étudiée par les historiens, à l'exception de Youschkevitch.

1. Du Mémoire 25 au Mémoire 59 §VII

Avant d'aborder son contenu, nous allons préciser le contexte dans lequel le Mémoire 59 §VII émerge, en revenant sur les aspects marquants de la période allant de la publication du Mémoire 25 dans le tome IV des *Opuscules* en 1768 à la mort du savant. Nous accorderons une attention particulière à ceux qui ont pu avoir un impact sur l'élaboration du texte que nous examinons.

Les motifs de la renonciation à la permanence de la forme

La question importante du cheminement de D'Alembert sera traitée en détails dans le chapitre II-3 de cette thèse. Nous résumons juste ici les étapes les plus marquantes de l'évolution qui va l'amener à ne plus exiger que les fonctions arbitraires intervenant dans la solution d'une EDP conservent toujours la même expression.

Après avoir défendu vivement la permanence de la forme dans le Mémoire 25, D'Alembert s'intéresse dans le Mémoire 34 §II à l'étude analytique de la propagation du son dans un tube d'air[105]. Il fait appel pour cela à l'EDP $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{2a\lambda}{\theta^2}\,\dfrac{d^2y}{dx^2}$, dans laquelle y représente l'excursion longitudinale d'une particule d'air. Puis, après intégration et introduction de la condition $y(0,x) = 0$, il aboutit à l'expression

$$y(t,x) = \varphi(x + \frac{\sqrt{2a\lambda}}{\theta}t) - \varphi(x - \frac{\sqrt{2a\lambda}}{\theta}t).$$

Mais, comme il tente de rendre compte d'un phénomène de propagation, la fonction φ doit forcément, en termes modernes, être à support compact au même titre que la fonction vitesse initiale à laquelle elle est liée. Or une telle fonction ne peut pas être assujettie à la permanence de la forme, D'Alembert se voit obligé de conclure[106] :

[105] « Sur la Vîtesse du Son », *Opuscules*, t. V, p. 138-146 ; *O.C.*, vol. III/5.

[106] *Opuscules*, t. V, p. 144.

> « [qu']il ne paroît pas possible de réduire à des formules analytiques exactes les loix du mouvement des particules de l'air, ni par conséquent de rendre raison par ces formules de la propagation du son [...] »

Par ailleurs, au cours des années 1770, la question de l'intégration des EDP, prise sous un angle purement mathématique, mobilise le milieu scientifique, et Condorcet va même associer à ses réflexions sur le sujet des considérations sur le raccordement convenable de fonctions changeant d'expression[107].

Par la suite, D'Alembert, changeant radicalement d'avis, va reprendre ce point, puis le développer et l'exposer clairement dans le Mémoire 58 §VI[108]. Prenant une EDP d'ordre 1, il explique que, si la fonction arbitraire intervenant dans la solution changent d'expression en un point, sa dérivée première doit avoir, en termes modernes, la même limite à droite et à gauche en celui-ci. Il généralise ensuite ce critère à une EDP d'ordre n en exigeant un raccordement pour les dérivées d'ordre 1 à n. Dans d'autres mémoires du tome VIII portant sur les fluides[109], on rencontre des remarques sur la possibilité d'accepter les fonctions changeant d'expression qu'il qualifie encore de « discontinues ». Puis, dans le Mémoire 59 §VI qui précède le 59 §VII dans le tome IX inédit des *Opuscules*, il applique les mêmes réflexions à la propagation du son.

En somme, le revirement tardif de D'Alembert sur la notion de fonction prend son origine dans la volonté de pouvoir résoudre le plus généralement possible des problèmes physico-mathématiques faisant intervenir des EDP. Ses motivations ne sont en fait pas propres aux cordes vibrantes, et le fond du raisonnement dans le Mémoire 58 §VI relève d'ailleurs des mathématiques pures.

Revenons maintenant sur les développpements que connaît le débat sur les cordes vibrantes dans la même période.

Le débat sur les cordes inégalement épaisses

A partir du milieu des années 1760, débute une polémique concernant spécifiquement les cordes inégalement épaisses. Pour donner une idée de son ampleur, récapitulons les interventions des savants majeurs sur le sujet[110] :

---

[107] *MARS* année 1771 (1774), p. 69-72. Ces réflexions se trouvent au sein du mémoire intitulé « Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des Equations aux différences partielles »(*id.*, p. 49-74).

[108] « Sur les fonctions dicontinues », *Opuscules*, t. VIII, p. 302-308 ; *O.C.*, vol. III/8. Adolf P. Youschkevitch avait remarqué ce revirement tardif de D'Alembert dans une étude intitulée « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle » (*Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P, 1981, p. 50), ainsi que dans un article en russe paru dans *Istoriko-matematitcheskie Issledovania* (n°20, 1975, p. 221-231) que nous avons traduit en annexe. Dans ce second texte, il se penche même sur les Mémoires 59 §VI et §VII.

[109] Mémoire 56 §I (p. 9-15), Appendice du Mémoire 57 (p. 373).

[110] Les années de publication figurent entre parenthèses dans la colonne de droite. Pour les mémoires d'Euler, nous avons également fait figurer le numéro de l'index Eneström.

Savant	Nombre d'interventions	Emplacement des interventions
D'Alembert	4	Mémoire 1 (1761) ; *HAB* année 1763 (1770) ; *Supplément de l'Encyclopédie*, t. II (1776-1777) ; Mémoire 59 §VII.
D. Bernoulli	2	*HAB* année 1765 (1767) ; *Nov. comm. Acad. Petrop.*, t. 16 (1772).
Euler	6	E287, *Nov. comm. Acad. Petrop.*, t. 9 (1764) ; E318, *Mélanges de Turin*, t. III (1766) ; E440, E441, E442, *Nov. comm. Acad. Petrop.*, t. 17 (1773) ; E567, *Acta Acad. Petrop.* année 1780 (1784).
Lagrange	1	*Mélanges de Turin*, t. II (1762)

Dans *HAB* année 1753, D. Bernoulli avait déclaré que le problème des cordes inégalement épaisses ne pouvait être résolu et Euler avait relayé cette idée pour des raisons différentes dans le même périodique. Ces affirmations poussaient D'Alembert à entreprendre dans le Mémoire 1 la résolution de l'EDP associée au problème[111] $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{Xdx^2}$. Cette première tentative venant de D'Alembert est négligée par un Truesdell fidèle à ses habitudes. En revanche, ce dernier étudie en détails les mémoires d'Euler sur le sujet et leur interaction avec ceux de D. Bernoulli[112]. D'une manière générale, les recherches sur les cordes inégalement épaisses vont très vite prendre une tournure très calculatoire. Face à une EDP récalcitrante, les différents protagonistes du débat sont réduits à chercher des solutions particulières ou à attribuer des valeurs particulières à X facilitant la résolution.

Dans son mémoire de 1764[113], Euler détermine par exemple comment doit être la fonction $X(x)$ pour que la solution ait une forme particulière, et il s'intéresse aussi aux vibrations d'une corde composée de deux portions d'épaisseur différente. Il se pose des problèmes similaires dans le tome III des *Mélanges de Turin*[114]. Ces deux textes, ainsi que la contribution de D'Alembert au *Supplément de l'Encyclopédie* sont les seuls à avoir un lien direct avec le Mémoire 59 §VII. Le mémoire de D'Alembert publié en 1770 dans *HAB* année 1763 mérite néanmoins qu'on s'y attarde un instant[115].

---

[111] $X(x)$ désigne l'épaisseur variable de la corde. Cette équation est déjà établie par Euler dans *HAB* année 1753 (p. 222).

[112] *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Series II, vol. 11-2, p. 301-316.

[113] E287 : « De motu vibratorio cordarum inaequaliter crassarum », *Nov. Comm. acad. Petrop.*, t. 9, 1764, p. 246-304.

[114] E318 : « Recherches sur le mouvement des cordes inegalement grosses », p. 27-59 (1766).

[115] La Guerre de Sept Ans a provoqué une certaine désorganisation dans la publication de *HAB*, et il ne faut donc pas s'étonner de l'écart entre l'année figurant sur un recueil et la date de parution de celui-ci. De plus, il peut arriver qu'on insère dans un recueil des interventions postérieures à

Le Mémoire de D'Alembert dans *HAB* année 1763

Intitulé « Extrait de différentes lettres de M^r. D'Alembert à M^r. De la Grange »[116], ce mémoire est composé, comme son titre le suggère, de lettres factices à Lagrange (datée du 11, 16 et 23 juin 1769) qui se trouve à Berlin depuis novembre 1766. Il est en fait essentiellement consacré aux cordes vibrantes. L'encyclopédiste commence par réagir aux mémoires d'Euler et Daniel Bernoulli publiés en 1767[117], car il n'a pas pu communiquer ses réponses dans le Mémoire 25, comme il le signale en note de bas de page :

> « Le Tome IV de mes *Opuscules*, qui a paru en Mai 1768, étoit presque achevé d'imprimer, quand j'ai reçu le Volume de Berlin de 1765 où sont les nouvelles objections de Mrs. Bernoulli et Euler. »

Cependant, seules les premières pages sont destinées à réagir aux écrits de ses illustres adversaires (p. 235-241), avec, d'ailleurs, des arguments assez semblables à ceux du Mémoire 1. Ensuite, D'Alembert consacre l'essentiel du mémoire (p. 241-260) à des réflexions concernant les cordes d'épaisseur inégale. Il tente de chercher des solutions sous la forme $y = \sum_n \xi_n(x)\cos(\frac{n\pi t}{T})$, ce qui l'amène à étudier des équations différentielles ordinaires. Le mémoire s'achève enfin sur des remarques concernant les courbes tautochrones.

Autres activités de D'Alembert dans la décennie 1770

D'Alembert n'intervient qu'à une seule autre reprise sur les cordes vibrantes dans la décennie 1770, dans le *Supplément de l'Encyclopédie* (1776). Bien qu'il soit peu impliqué dans cette entreprise qu'il ne co-dirige pas, il compose un nouvel article Cordes (vibration des), dans lequel il dénonce un paralogisme d'un « savant Geometre »[118]. Cet inconnu n'est autre qu'Euler avec lequel D'Alembert est à nouveau en mauvais termes après une brève réconciliation en 1763 et 1764.

Sa correspondance avec Lagrange confirme que D'Alembert est peu mobilisé par les cordes vibrantes dans cette période. Il se concentre plus sur la Mécanique Céleste, la figure de la Terre et les fluides qui sont les thèmes centraux des tomes VI (1773), VII et VIII (1780) des *Opuscules*.

2. Structure et rédaction du Mémoire 59 §VII

Le Mémoire 59 §VII se décompose de la manière suivante :

---

l'année de celui-ci. Ce type d'entorse s'est produit pour le mémoire de D'Alembert dans *HAB* année 1763.

[116] *HAB* année 1763 (1770), p. 235-277.

[117] D. Bernoulli : « Mémoire sur les vibrations des cordes d'une épaisseur inégale », *HAB* année 1765, p. 281-306. Euler : « Sur le mouvement d'un corde, qui au commencement n'a été ébranlée que dans un partie », *id.*, p. 307-334 (E339).

[118] L'article Corde (vibration des) de l'*Encyclopédie Méthodique - Mathématiques* (t. I, p. 423-425, 1784) reprend celui de l'*Encyclopédie* et du *Supplément* (t. II, 1777, p. 599b-600a.

– Art. 1-3 : Possibilité d'accepter, dans la solution du problème des cordes vibrantes, des fonctions changeant d'expression à condition qu'elles ne fassent pas de sauts de courbure. Exemples. Méthode de construction de la courbe à chaque instant.
– Art. 4-8 et 10 : Nouvelle argumentation contre les sauts de courbure.
– Art. 9 : Réflexions à propos de l'approximation d'une courbe par un polygone (travaux de Lagrange et de Laplace).
– Art. 11-12 : Réflexions sur l'équation d'équilibre des fluides et les fonctions discontinues.
– Art. 13-18 : Critique du paralogisme d'Euler à propos du problème d'une corde non uniformément épaisse.
– Art. 19 -22 : Cas d'une corde uniformément épaisse rectiligne à l'instant initial et d'une corde soumise à une résistance constante
– Art. 23 : Problème d'un corps soumis à une force proportionnelle à sa distance à un point C.

Ce plan détaillé montre que le mémoire 59 §VII est le fruit de réflexions venant d'horizons assez différents (fonctions discontinues, cordes d'épaisseur inégale, fluides...). Même si le revirement de D'Alembert sur la permanence de la forme est un aspect prépondérant, on peut difficilement dégager une unité.

Les indices concernant sa rédaction ne sont pas légion, mais on peut faire les remarques suivantes. Le passage où D'Alembert s'en prend au paralogisme d'un « savant Geometre » (Art. 13-18) est forcément prêt depuis 1776, puisque, de son propre aveu[119], il figure déjà dans le *Supplément de l'Encyclopédie*. Pour le reste, les trois premiers articles sont assez proches dans leur contenu de certains mémoires du tome VIII des *Opuscules* que nous avons évoqués, et le Mémoire 59 §VII se trouve d'ailleurs au tout début du tome IX inédit. On peut donc raisonnablement émettre l'hypothèse qu'à l'exception des articles 13 à 18, le Mémoire 59 §VII a été essentiellement rédigé au cours de l'année 1781[120]. De plus, compte tenu des échanges avec Laplace au début de 1782[121], on peut ajouter que D'Alembert semble encore préoccupé par les cordes vibrantes à cette époque.

3. Contenu du Mémoire 59 §VII

Nous allons maintenant tenter de cerner les points fondamentaux du Mémoire 59 §VII.

---

[119] Note de bas de page, f. 315.

[120] Sur ce sujet, v. Pierre Crépel : « Les dernières perfidies de D'Alembert », *Mathématiques et Sciences humaines*, n°176, 2006, p. 61-87.

[121] Dans sa lettre du 10 mars (*Oeuvres Complètes de Laplace*, t. XIV, p. 351-354), Laplace dit avoir discuté des cordes vibrantes avec D'Alembert la veille à l'Académie. Le point de départ de leur discussion était le « Mémoire sur les suites » de Laplace publié dans les *MARS* année 1779 (1782).

Les fonctions peuvent changer d'expression

Comme nous l'avons dit plus haut, le renoncement de D'Alembert à la permanence de la forme est l'aspect majeur de ce mémoire. Cette évolution concernant les fonctions discontinues ne se restreint néanmoins pas aux cordes vibrantes. En fait, le savant ne fait qu'appliquer dans le Mémoire 59 §VII des réflexions qu'il a déjà déclinées à ses autres thèmes de recherche de prédilection.

Bien qu'il ne le reprécise pas, D'Alembert étudie essentiellement dans ce mémoire le cas d'une corde pincée, c'est-à-dire écartée de sa position rectiligne d'équilibre à $t = 0$ et lâchée avec une vitesse nulle. La fonction dont il parle à l'article 1 représente donc l'allure initiale de la corde. Parmi les quatre conditions qu'elle doit vérifier, on remarque que l'absence de tangentes verticales et la petitesse des vibrations permettent juste à l'EDP de modéliser les vibrations de la corde. En fait, la seule restriction présente pour des motifs mathématiques est l'absence de sauts de courbure. C'est la dernière qui subsiste puisque D'Alembert a renoncé à la permanence de la forme, et autorise les fonctions à être, dans son langage, « discontinues ».

Alors qu'il ne le faisait pas dans les autres textes tardifs où il se penche sur les fonctions discontinues (58 §VI, 59 §VI, Appendice du 57), D'Alembert tente, dans l'article 2 du 59 §VII, d'être plus explicite, et donne des exemples de fonctions changeant d'expression sans qu'il y ait de sauts de courbure. On pourrait lui reprocher de ne pas répéter que la dérivée première doit bien se raccorder, mais du fait de l'imparité, il n'y est pas obligé, et le Mémoire 58 §VI[122] montre d'ailleurs qu'il a parfaitement à l'esprit cette condition[123].

Ainsi, dès lors qu'on n'exige plus la permanence de la forme, les fonctions exemptes de sauts de courbure ressemblent beaucoup à celles dites aujourd'hui « de classe C^2 »[124]. Un autre aspect du raisonnement de D'Alembert confirme cette analyse.

Variations dans la défense de l'absence de sauts de courbure

Si l'on prête maintenant attention à la manière dont D'Alembert défend l'absence de sauts de courbure, on observe plusieurs évolutions par rapport aux Mémoires 1 et 25. Une lecture trop rapide des articles 4 à 8 pourrait même nous laisser penser qu'il doute de cette condition, mais son approche est en fait plus subtile.

Tout d'abord, rappelons que dans le Mémoire 1, il avait invoqué pour exclure les sauts de courbure plusieurs types de raisons :

– mathématique : on ne peut pas affecter de valeur à la dérivée seconde si elle fait un saut,

[122] *Opuscules*, t. VIII, 1780, p. 307-308.

[123] Un saut de la dérivée première ne passerait d'ailleurs pas inaperçu dans la formule qu'il utilise pour calculer la dérivée seconde car celle-ci tendrait vers l'infini.

[124] Au détail près que D'Alembert ne considère pas comme un saut une limite infinie en un point.

– physique et métaphysique : même remarque pour la force accélératrice, qui, en plus, doit moralement varier par degrés insensibles.

Son argumentation de l'article 5 revient à douter des motifs physiques et métaphysiques. Et, dans les articles 6 et 7, il explique qu'on peut affecter, un peu par convention, une valeur à la force accélératrice en cas de saut.

En somme, il dépouille son raisonnement contre les sauts de courbure des arguments non mathématiques, ce qui le rapproche des conceptions de ses successeurs et conforte notre jugement du paragraphe précédent. Les nouveaux doutes qu'il exprime à l'article 8 sont un peu une conséquence de cette clarification. D'Alembert envisage que l'on puisse être moins exigeant si l'on considère une EDP dans un cadre physique que si on la regarde d'un strict point de vue mathématique. Cette preuve de lucidité ouvre la voie au développement d'outils mathématiques destinés à appréhender les irrégularités présentes dans l'univers physique.

L'évocation des fluides

Comme nous l'avons signalé plus haut, la question de l'équilibre des fluides et des fonctions discontinues est déjà abordée dans le tome VIII des *Opuscules*. Sa courte évocation dans le Mémoire 59 §VII nous permet néanmoins de faire quelques remarques. D'abord, D'Alembert emploie des termes différents pour désigner les fonctions qu'il admet dans ce domaine car, les EDP étant d'ordre 1, il n'est plus question de sauts de courbure. Il parle, par exemple, de « fonctions discontinues mais ne changeant pas brusquement » (art. 12), et emploie à ce titre un vocabulaire moins ambigu que celui du tome VIII des *Opuscules*, où il exigeait que R et Q soient « continuement discontinues » (p. 12). Par ailleurs, bien qu'il tolère désormais les fonctions discontinues sous certaines conditions, il persiste à désigner par des symboles distincts leurs différentes expressions : R et R', Q et Q', comme il le fait d'ailleurs depuis son mémoire sur les cordes vibrantes de *HAB* année 1750[125].

Sur le plan du contenu scientifique, D'Alembert n'ajoute rien de déterminant sur le sujet par rapport au tome VIII des *Opuscules*.

Le prétendu paralogisme d'Euler

On prend assez peu de risque en affirmant, avec Truesdell, que l'auteur du paralogisme que D'Alembert attaque dans les articles 13 à 18 n'est autre qu'Euler. Pour que D'Alembert tienne à publier deux fois un texte, c'est qu'il s'adresse forcément à un adversaire illustre.

Cependant, sa critique rate sa cible car il prête à Euler des intentions qu'il n'a pas. Jamais, ce dernier n'a prétendu que la solution du problème des cordes inégalement épaisses était en général $y = \phi(t + \int ds\sqrt{S}) + \phi(-t + \int ds\sqrt{S})$. Il a seulement cherché sous quelles conditions pour l'épaisseur de la corde, ce problème

[125] « Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration », *HAB* année 1750, p. 355-360.

pouvait avoir une solution de la forme[126] $y(t,x) = v\phi(u)$ ou encore[127]

$$y = P(x)\Gamma(\int u(x)dx + t) + Q(x)\Gamma'(\int u(x)dx + t) + R(x)\Gamma''(\int u(x)dx + t),$$

ce qui n'est pas pareil. La volonté de l'encyclopédiste de ne pas laisser le dernier mot à Euler est cependant très forte et elle transparaît à nouveau dans l'article 20 au sujet du cas d'une corde ébranlée sur une seule partie, qu'avait invoqué Euler pour répliquer à ses contradicteurs[128].

EDP ET RÉALITÉ PHYSIQUE[129]

En évoquant le raisonnement de D'Alembert contre les sauts des courbures, nous avons abordé un aspect de sa perception de l'articulation entre physique et mathématiques. Il faut ajouter que les derniers articles du Mémoire 59 §VII illustrent le recul croissant dont il fait preuve à l'égard des équations censées modéliser un phénomène physique. Dans les articles 21 et 23, il essaie de rendre compte de la cessation de mouvements d'oscillation à l'aide de nouvelles équations différentielles. Il va expliquer à cette occasion, que le mouvement s'arrête dès qu'en un instant t_1, la vitesse s'annule et que l'accélération est compensée par une autre force résistante, même si les équations et leur solution suggèrent que le mouvement doit continuer après t_1. Cela revient à considérer que l'équivalence entre l'équation et le phénomène qu'elle décrit est brisée au bout du temps t_1[130], dès qu'on a obtenu le résultat qu'on souhaitait[131].

4. Conclusion

Le revirement de D'Alembert concernant les fonctions admissibles dans la solution du problème des cordes vibrantes mérite donc d'être considéré comme le point fondamental du Mémoire 59 §VII. Il faut retenir deux aspects dans l'évolution de sa position :

– le renoncement à la permanence de la forme,
– sa défense désormais exclusivement mathématique de l'absence de sauts de courbure.

[126] E287, *Nov. comm. Acad. Petrop.*, t. 9 (1764), p. 256.

[127] E318, *Mélanges de Turin*, t. III (1766), p. 36. Dans les notations d'Euler,Γ' représente la dérivée de Γ, Γ'' la dérivée seconde...

[128] « Sur le mouvement d'un corde, qui au commencement n'a été ébranlée que dans un partie », *HAB* année 1765 (1767), p. 307-334 (E339)

[129] Ce sujet est abordé aussi dans le chapitre 4 de la partie II.

[130] D'Alembert sous-entend qu'alors, la force résistante s'efface.

[131] Ce passage éclaire certains articles du 3$^{\text{ème}}$ Supplément du Mémoire 25 (art. 8-11). Dans certains passages, l'encyclopédiste donnait à première vue l'impression de se fourvoyer en affirmant que la corde s'arrête parce qu'elle est, en un instant t_1, à l'état rectiligne avec une vitesse nulle, alors qu'il subsiste une accélération d'après l'EDP et la solution. En réalité, D'Alembert pense que peu importe la solution après t_1, ou plus exactement que l'EDP n'est alors plus la même.

L'approche de D'Alembert revient donc presque[132] à exiger des fonctions qu'elles soient, en termes modernes, de classe C^2. Elle préfigure donc des notions mises au jour au cours du XIXe siècle. Cependant, elle a été souvent minimisée par les historiens. Même Youschkevitch laisse entendre que D'Alembert s'est finalement rallié à la position victorieuse d'Euler[133]. Or cette interprétation est erronée puisque, alors que D'Alembert maintient encore certaines restrictions sur la régularité des fonctions, Euler n'en fixe aucune, même dans son oeuvre tardive.

Par ailleurs, D'Alembert a eu également une influence sur ses contemporains et ses successeurs. Nous avons vu à l'occasion du Mémoire 25, que Lagrange s'était rapproché de sa position, et nous évoquions au début de ce chapitre des réflexions de Condorcet sur les fonctions (*MARS* année 1771, p. 69-72) qui rejoignaient celles de son aîné. Il nous faut maintenant aborder le cas de Laplace qui est évoqué à l'article 9 du Mémoire 59 §VII.

Dans son « Mémoire sur les suites »[134], ce dernier explique, en vertu de son étude du polygone vibrant, que l'on peut admettre les fonctions discontinues dans la solution, mais il ajoute[135] :

> « il faut seulement observer que si l'équation différentielle est de l'ordre de n, & que l'on nomme u sa variable principale, x & t étant les deux autres variables, il ne doit point y avoir de saut entre entre deux valeurs consécutives de $\left(\dfrac{\partial^{n-r}u}{\partial x^s \partial t^{n-s-r}}\right)$,[...] »

Dans sa lettre à D'Alembert du 10 mars 1782, il écrit également :

> « Il m'a toujours semblé que M. Euler a été trop loin en n'assujettissant à aucune condition les fonctions arbitraires ; mais je pense que vous avez été trop circonspect en les restreignant aux seules fonctions analytiques. »

Il semble donc que le jeune Laplace soit en phase avec la nouvelle approche développée par D'Alembert sur la fin de sa vie, puisque ce dernier autorise aussi les fonctions discontinues. Le rôle et l'influence de D'Alembert mérite donc d'être reconsidérés à plus d'un titre.

---

[132] Une nuance est ici nécessaire car D'Alembert ne considère pas qu'une fonction ayant une asymptote verticale en un point fait un saut. Il lui attribue alors une valeur infinie, et n'exclut pas ce point du domaine de définition.

[133] « A propos de l'histoire du débat sur les cordes vibrantes (D'Alembert et l'utilisation des fonctions "discontinues") », *Istoriko-matematitcheskie Issledovania*, 20, 1975, p. 221-231. V. Annexes.

[134] *MARS* année 1779 (1782), p. 207-309.

[135] *id.*, p. 300.

Conclusion de la partie I

L'étude détaillée à laquelle nous venons de procéder nous permet de dégager quelques premières conclusions.

L'ÉLABORATION PROGRESSIVE DE LA NOTION DE SAUTS DE COURBURE (1750-1761)

Dans son mémoire de *HAB* année 1750 et dans son manuscrit de 1755, la position de D'Alembert consistait seulement à affirmer que les courbes représentant l'allure de la corde devaient être « renfermées dans une seule et même équation » pour que le problème puisse être résolu. En d'autres termes, il demandait que les fonctions associées vérifient ce que nous avons appelé la permanence de la forme, sans vraiment donner de preuve.

Il faut en fait attendre le Mémoire 1 pour voir émerger l'exigence plus géométrique d'absence de sauts de courbure, que l'encyclopédiste va adjoindre à celle de permanence de la forme en pensant que les deux sont équivalentes. Il va ensuite défendre simultanément ces deux conditions dans les Mémoires 1 et 25, et en ajoutant que toutes les dérivées successives ne doivent pas faire de sauts dans le second.

Les arguments qu'il va fournir contre les sauts de courbure sont le plus souvent pertinents et évoquent la notion de dérivées secondes à droite et à gauche. L'interdiction des sauts de courbure montre également son souci de se placer sur un terrain géométrique pour mieux répondre à Euler. Néanmoins, ce seront plus les difficultés rencontrées dans le calcul des dérivées secondes que les considérations géométriques qui convaincront en 1765 Lagrange de la nécessité de l'absence de sauts de courbure.

VERS LES FONCTIONS DE CLASSE C^2

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 5, l'évolution de D'Alembert sur les fonctions et son renoncement à la permanence de la forme prennent leurs racines et ont des répercussions au delà du seul problème des cordes vibrantes et c'est pourquoi, nous y reviendrons en partie II (chapitre 3).

Toutefois, la déclinaison de cette évolution majeure au problème des cordes vibrantes situe D'Alembert très proche de la notion moderne de fonctions de classe C^2. En effet, comme l'encyclopédiste n'exige plus que l'absence de sauts de courbure et dépouille cette requête de toutes les motivations non mathématiques qui plaidaient en sa faveur (continuité de la force accélératrice...), les fonctions admissibles pour représenter la corde à $t = 0$ ressemblent beaucoup à nos fonctions de classe C^2. Il faut néanmoins nuancer ce propos en rappelant que D'Alembert ne différencie pas les cas où la dérivée n'existe pas et ceux où elle n'est pas continue, et que ses sauts ne correspondent pas exactement à nos discontinuités.

Par ailleurs, le fait qu'il maintienne son exigence d'absence de sauts de courbure montre que, contrairement à ce que laisse entendre Youschkevitch[136], l'encyclopédiste ne se rallie pas à Euler. Et, il n'est d'ailleurs pas si isolé que cela, puisque sa position au début des années 1780 est proche de celle de Laplace.

Les réflexions sur le calcul des limites

Dans le chapitre 4 sur le Mémoire 25 des *Opuscules*, nous avons montré que D'Alembert formulait des remarques assez fines sur le calcul des limites. A la différence de ses contemporains, il se montre vigilant sur l'interversion des limites et sur le recours à des formules ne fonctionnant que dans des cas particuliers. Ses réflexions sur le sujet témoignent en fait d'une compréhension assez aigüe de ce concept.

Questions faisant appel à un corpus élargi

Cette première étude nous permet également de poser des questions auxquelles nous allons tenter de répondre à l'aide d'autres textes de D'Alembert et ses contemporains. On peut les énumérer ainsi :

- Quels sont les motifs et la pertinence du rejet par D'Alembert de la manipulation formelle des séries entières.
- Quelles sont les raisons qui le poussent à rejeter la généralité des développements en séries entières et trigonométriques ? Les deux questions sont-elles liées pour lui ?
- Sa manière d'envisager les EDP, les conditions initiales et aux limites, et la notion de solution est-elle si proche de la nôtre ? Quelles sont les caractéristiques propres à sa démarche ?
- Quelle place accorde-t-il à la théorie des EDP au sein de l'Analyse ?
- Quelles sont les dessous du revirement de D'Alembert sur la permanence de la forme ?
- Ses tentatives d'expliquer la cessation des vibrations font-elles écho à d'autres aspects de son oeuvre ?

Ces interrogations vont structurer les études transversales que nous proposons en Partie II.

Pour terminer, nous présentons deux tableaux récapitulant les thèmes abordés par D'Alembert dans ses mémoires sur les cordes vibrantes.

Tableau récapitulant des thèmes abordés dans les mémoires sur les cordes vibrantes

Dans ses recherches sur les Cordes Vibrantes, D'Alembert aborde différents aspects du problème et il est conduit parfois vers des sujets apparemment lointains de ses préoccupations de départ. Afin de donner une vision globale de ses recherches et de permettre au lecteur de se frayer un chemin dans l'oeuvre de l'encyclopédiste, nous présentons dans les pages qui suivent deux tableaux suivants qui tentent de

[136] « A propos de l'histoire du débat sur les cordes vibrantes (D'Alembert et l'utilisation des fonctions "discontinues") », *Istoriko-matematitcheskie Issledovania*, 20, 1975, p. 221-231.

recenser les différents aspects abordés par D'Alembert. Dans le tableau 1, nous avons 2 catégories :

– la première regroupe les étapes les plus évidentes de la mathématisation du problème des cordes vibrantes (« Mise en équation, Formes différentielles exactes et EDP », « Résolution de l'équation », « Instant initial », « Courbes des positions et des vitesses initiales »), ainsi que le problème, cher à D'Alembert, des fonctions que l'on peut admettre comme allure initiale de la corde (« fonctions admissibles »). Il va de soi que ce dernier thème est inclus dans le précédent. Mais, pour des raisons de place, nous n'avons pas reporté à chaque fois les articles de la ligne « fonctions admissibles » dans la ligne précédente.
– la seconde rassemble les autres questions mathématiques liées moins directement au problème des cordes vibrantes mais que D'Alembert est amené à traîter dans ses mémoires sur le sujet.

Le tableau 2 observe les recherches de D'Alembert sous un angle plus physique, et distingue différents aspects avec ce regard.

Comme le laisse apparaître ces tableaux, certains articles abordent plusieurs thèmes, et il existe des lignes plus ou moins remplies. Il nous faut signaler aussi que certains thèmes - du type de ceux que nous examinerons en Partie II - ne sont évoqués que marginalement dans le corpus sur les cordes vibrantes. Par exemple, la question du son et de sa propagation est, pour l'essentiel, étudiée par D'Alembert dans les Mémoires 34 §II et 59 §VI. Celle du développement en séries entières est examinée plus en profondeur dans le Mémoire 28, tout comme les équations fonctionnelles.

Précisons également qu'il y a deux points abordés par D'Alembert dans ses mémoires sur les cordes vibrantes que nous avons laissés de côté car trop marginaux : la convergence en moyenne de séries divergentes périodiques étudiée au début du 1er Supplément du Mémoire 25, et la question des fluides évoquée dans le 59 §VII (Art. 11-12).

Partie II :
Etude de questions transervales

Présentation de la partie II

Dans cette seconde partie, nous proposons d'examiner plusieurs questions transversales qui ont émergé au cours de notre étude de corpus.

Tout d'abord, nous essaierons de recenser l'ensemble des doutes et incertitudes de D'Alembert à propos des développements en série, et nous tenterons de cerner leur origine, leur nature, leurs connexions et leur pertinence (chapitre 1).

Ensuite, nous consacrerons deux chapitres (2A et 2B) à étudier de manière détaillée les équations aux dérivées partielles dans l'oeuvre tardive du savant. Nous nous intéresserons dans un premier temps à son utilisation des EDP dans le cadre de la résolution de problèmes physico-mathématiques. Mettant en regard ses recherches sur l'écoulement des fluides et celles sur les cordes vibrantes, nous tenterons de montrer que les *Opuscules* permettent de préciser la véritable nature de sa démarche, ainsi que ses présupposés. Dans un second temps (2B), nous examinerons le pas qu'il franchit en entreprenant, dans le tome IV des *Opuscules*, une étude des EDP en tant qu'objet exclusivement mathématique, et nous en évoquerons les implications.

Puis, nous essaierons d'éclairer sous un nouveau jour le fameux débat sur la nature des fonctions arbitraires (chapitre 3), en insistant sur l'enjeu que représente la résolution des problèmes faisant intervenir des EDP. Nous chercherons ainsi à mettre en perspective et à mieux comprendre les raisons qui poussent D'Alembert à modifier sa conception de la notion de fonction, et les étapes de son évolution.

Enfin, nous regarderons comment le savant parvient à dénouer un certain nombre de contradictions réelles ou apparentes pouvant se glisser entre les résultats et exigences de l'Analyse et la réalité physique ou, du moins, la représentation qu'il s'en fait (chapitre 4).

Certaines des questions examinées ici, liées aux séries ou à la mécanique des milieux continus, pourraient être abordées à l'aide d'un corpus encore plus large allant au delà du XVIII^e^siècle, et faisant notamment appel aux travaux de Laplace, Fourier, Poisson... Nous avons choisi de ne pas nous aventurer dans cette voie et de proposer plutôt une étude assez « proche des textes ».

Chapitre 1 : Synthèse des doutes de D'Alembert sur l'utilisation des séries

Grâce à l'étude que nous venons de mener, nous avons pu constater que D'Alembert émettait régulièrement des doutes à l'égard des développements en séries entières ou trigonométriques, et que, sur ce point, il se distinguait de ses contemporains.

Afin de mieux comprendre les arcanes de sa pensée et de cerner les motivations qui le poussent à adopter ce type de position très réservée vis-à-vis des développements en séries, commençons par énumérer les difficultés soulevées par D'Alembert :

– Dans le Mémoire 25 (art. 9-11), et ponctuellement dans le Supplément du Mémoire 1, il critique l'utilisation de séries divergentes dans des raisonnements mathématiques.
– Dans le Mémoire 1 des *Opuscules* (§.XXIV), il affirme qu'une fonction impaire et périodique n'est pas forcément égale à un développement en série trigonométrique.
– Dans le Mémoire 25 (Suppl. 2, art. 18), il explique que toute fonction n'est pas égale à un développement en séries entières (dit aujourd'hui de Taylor).

On peut réunir les deux derniers points et formuler ainsi les deux objections principales de D'Alembert :

– On s'expose à des erreurs en ne s'assurant pas de la convergence des séries qu'on utilise.
– Une fonction prise au hasard ne se développe pas forcément en séries entières ou trigonométriques.

Le premier aspect de l'approche dalembertienne évoqué ci-dessus est déjà abordé dans l'historiographie, et nous nous contenterons donc d'un rappel. En revanche, le second est passé plus inaperçu, c'est pourquoi nous insisterons plus sur celui-ci, même si nous consacrerons dans ce chapitre une partie à chacune de ces questions en adoptant une présentation plutôt chronologique. Nous essaierons ainsi non seulement de comprendre les motivations de l'encyclopédiste, mais également d'évaluer la portée et l'impact de ses réflexions. Nous ferons appel pour cela à un corpus élargi incluant d'autres mémoires de D'Alembert, et des travaux de ses contemporains.

1. Des réserves sur la manipulation formelle des séries entières

Les occurrences dans l'oeuvre de D'Alembert

Nous avons vu au chapitre 4 de la partie I que D'Alembert s'oppose dans le

Mémoire 25 à l'utilisation de séries entières lorsqu'elles ne sont pas convergentes[137]. Dans les art. 9-11 de ce mémoire, il critique effectivement Lagrange à ce sujet. L'origine de leur discussion à cet endroit concerne l'égalité :

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) \ldots = -\frac{1}{2}.$$

Celle-ci est utilisée par Lagrange dans ses premières « Recherches sur la nature, et la propagation du son » (1759). Dans le Supplément du Mémoire 1 (1761), rejetant l'usage des séries divergentes, D'Alembert conteste la validité de cette égalité sur laquelle repose la preuve du savant turinois. La discussion entre les deux savants s'est poursuivie dans le tome II des *Mélanges de Turin*[138], où Lagrange revendiquait le droit d'utiliser de telles séries. Dans le Mémoire 25 des *Opuscules*, D'Alembert réplique non seulement à Lagrange, mais aussi à Daniel Bernoulli qui défendait la même égalité avec une approche probabiliste (Supplément 1).

Dans les articles 9 à 11 du Mémoire 25, D'Alembert s'intéresse essentiellement aux séries $\sum_n x^n$ et $\sum_n (-1)^n x^n$, sous-jacentes à $\sum_n \cos(nx)$, et aux x pour lesquelles elles convergent. Il serait d'ailleurs plus juste de dire, même si cela fait ici peu de différences, que le savant recherche les x pour lesquels la valeur de la série coïncide avec celle de la fonction dont elle est issue, car il pose le problème en ces termes. Ceci étant, ce n'est pas dans la détermination de ces valeurs de x que réside l'originalité de l'encyclopédiste. De tels résultats sont en effet connus de lui comme de ses contemporains. Il se démarque par ses réserves sur les manipulations purement formelles de séries entières, et par le fait qu'il maintienne que l'emploi de séries divergentes expose à des erreurs.

C'est avec cet état d'esprit qu'il va étudier dans le Mémoire 35 §I[139] la convergence du développement en série de $(1+\mu)^m$, lorsque m n'est pas un entier positif. Il généralise en cela un travail entrepris par Varignon dans les *MARS* année 1715[140], auquel il fait d'ailleurs explicitement référence. D'Alembert aboutit finalement à la conclusion exacte qu'il faut que $|\mu| < 1$ pour que la série associée à $(1+\mu)^m$ converge, et livre quelques réflexions sur les séries alternées. Ce mémoire permet de remarquer au passage que le terme « convergent » a un sens fluctuant chez l'encyclopédiste, il peut avoir le même sens qu'aujourd'hui ou désigner simplement une série dont les termes décroissent.

Dans la suite de son oeuvre, D'Alembert invoque ce texte dans le Mémoire 42

[137] En termes actuels, lorsque la variable est en dehors du disque de convergence.

[138] « Addition à la première partie des recherches sur la nature & la propagation du son imprimées dans le volume précedent », *Mélanges de Turin*, t. II, p. 323-336 ; *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 319-332.

[139] « Réflexions sur les suites divergentes ou convergentes », *Opuscules*, t. V, 1768, p. 171-183.

[140] « Précautions à prendre dans l'usage des Suites ou Series infinies résultantes, tant de la division infinie des fractions, que du Développement à l'infini des puissances d'exposants négatifs entiers », *MARS* année 1715, p. 203-225.

§I des *Opuscules*[141] alors qu'il est aux prises avec des problèmes d'astronomie.

Les études historiques sur le sujet

La position de D'Alembert vis-à-vis des manipulations formelles est un sujet assez balisé qui a été abordé par certains historiens des mathématiques. On peut citer notamment l'étude récente de Giovanni Ferraro[142] sur ce sujet. Dans cet article, il explique que la position de D'Alembert est proche de celle de Varignon et de Nicolas II Bernoulli, mais à contre courant de la tendance générale qui consiste à manipuler formellement des séries sans se soucier de convergence. Il précise néanmoins à juste titre que l'encyclopédiste ne peut pas rejeter en bloc les manipulations formelles, du simple fait des résultats considérables qu'elles permettent d'obtenir.

Dans son mémoire de DEA[143], Sébastien Nesme s'est également penché sur la question. Il a montré que le rejet des séries divergentes n'est pas encore vraiment présent dans les articles de l'*Encyclopédie* signés par D'Alembert, et qu'il faut attendre les *Opuscules*. A propos du Mémoire 35 §I, il a remarqué que le savant ne propose pas de preuve du critère qui porte son nom sur la limite de $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$. D'Alembert utilise en revanche un résultat déjà présent dans l'article BINÔME de l'*Encyclopédie*[144] consistant à dire que si le quotient de deux termes consécutifs est strictement inférieur à 1 à partir d'un certain rang, la série converge. Bien qu'apparemment assez proche du critère moderne dit de D'Alembert, cet énoncé peut conduire à des conclusions erronées, comme on le voit si on considère la série harmonique $\sum_k \dfrac{1}{k}$.

S. Nesme a aussi observé que Lacroix mentionne les conclusions du Mémoire 35 §I dans son *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (t. I), sans toutefois reprendre à son compte le rejet dalembertien des séries divergentes.

Qu'ajouter à cela ?

Les études historiques concernant D'Alembert et la convergence des séries sont donc plutôt satisfaisantes. On peut néanmoins ajouter quelques observations. D'abord, on remarque que les recherches de D'Alembert sont encore partiellement empreintes de l'utilisation des séries pour l'approximation. En témoignent ses inquiétudes dans les Mémoires 25 (p. 132) et 35 §I (p. 181) concernant la lenteur de la convergence du développement en série de $\sin(x)$ quand x est grand, ou encore sa volonté d'accélérer la convergence des séries dans le Mémoire 35 §I (p. 179-180)[145].

---

[141] « Du mouvement des apsides quand la force centrale n'est pas exactement en raison inverse du quarré de la distance », *Opuscules*, t. V, p. 425-440.

[142] « Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815 », *Historia Mathematica*, 34 (2007), p. 62-88.

[143] *U_{n+1}/U_n ? D'Alembert et la convergence des séries*, mémoire de DEA « Construction des savoirs scientifiques », Université Lyon 1, Sébastien Nesme, juin 2003.

[144] t. II, 1752.

[145] Ce sont ces considérations sur la rapidité de la convergence qui amènent D'Alembert à parler

Nous tenons peut-être là une des sources de son rejet des manipulations formelles. Mais ce refus peut aussi venir d'une certaine exigence de rigueur. Pour D'Alembert, cette rigueur consiste à exiger que toutes les étapes d'un raisonnement soit bien assurées et prises en compte. On l'a vu lorsqu'il demande aux solutions du problème des cordes vibrantes de bien vérifier l'EDP d'où la forme générale de ces solutions est issue. On le retrouve dans ses préoccupations sur les différentes manières de déduire le développement en série de sinus (par l'intermédiaire d'Arcsinus...). Et on le constate encore lorsqu'il discute la validité de l'égalité $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) \ldots = -\frac{1}{2}$, qui permet à Lagrange de déduire une expression de la solution générale du problème des cordes vibrantes semblable à la sienne $(\phi(x+t) + \phi(x-t))$.

Ce dernier point nous permet d'ailleurs de nuancer un aspect de l'analyse de G. Ferraro. Même s'il est incontestable qu'au cours du XVIIIe siècle, la manipulation formelle de séries a pu produire des avancées considérables et que ses adversaires ont échoué à proposer une théorie alternative, il n'en reste pas moins que D'Alembert a mathématiquement raison dans sa discussion avec Lagrange à propos de $\sum_n \cos(nx)$, car certain manque de rigueur affecte la validité de la preuve du savant turinois, comme l'admet d'ailleurs H. Burkhardt (p. 38).

2. Des fonctions résistant au développement en séries

La contestation de la généralité du développement en série trigonométrique

Dans ses recherches sur les cordes vibrantes parues dans *HAB* année 1753[146], Daniel Bernoulli expliquait que toute les figures initiales de la corde pouvaient s'exprimer sous la forme

$$y(x) = \alpha \sin(\frac{\pi x}{a}) + \beta \sin(\frac{2\pi x}{a}) + ...$$

Même si on doit reconnaître à ce savant un grand sens physique et une certaine intuition mathématique, il faut signaler qu'il ne donne néanmoins pas de preuve mathématique de ce résultat. Dans le Mémoire 1 des *Opuscules* (1761) et dans le manuscrit de 1755 qui en était une version préliminaire[147], D'Alembert réagit à ces recherches et consacre plusieurs pages à démontrer qu'une fonction impaire et $2a$-périodique n'a pas forcément un tel développement en série trigonométrique, même si on lui interdit les sauts de courbure. Certaines raisons extérieures à l'Analyse, liées à l'Acoustique, le poussent à adopter une telle position, mais son argument mathématique essentiel consiste à tenter d'exhiber un contre-exemple. Il construit une

de séries convergeant « plus » ou « moins ».

[146] « Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 & 1748 », *HAB* année 1753 (1755), p. 147-172.

[147] Ainsi que dans l'article FONDAMENTAL de l'*Encyclopédie* rédigé entre temps.

courbe périodique à l'aide d'un procédé qui évoque la construction de la cycloïde à partir du cercle, puis explique évasivement que cette courbe ne peut être renfermée dans l'équation $y(x) = \alpha \sin(\frac{\pi x}{a}) + \beta \sin(\frac{2\pi x}{a}) + ...$ (Mémoire 1, p. 42-45). La raison semble être pour lui que la courbe comporte un point de rebroussement de première espèce. Notons également qu'il tient à opposer à D. Bernoulli des courbes mécaniques, c'est-à-dire transcendantes, alors qu'Euler n'avait eu recours qu'à des courbes algébriques pour contester la théorie de ce dernier.

Ses arguments se précisent dans le Mémoire 25 des *Opuscules* (t. IV, 1768). Après avoir expliqué qu'on pouvait accepter certaines puissances fractionnaires dans l'expression des fonctions représentant l'allure initiale d'une corde vibrante, il revient dans le second Supplément (p. 192) sur les séries trigonométriques :

> « Je crois pouvoir conclure de-là que l'équation des courbes vibrantes est renfermée dans une formule beaucoup plus générale que l'équation $y = A \sin .\pi x + B \sin .2\pi x +$ &c. donnée par M. de la Grange dans le troisiéme volume des Mémoires de Turin, laquelle équation devient $y = \alpha x + \zeta x^3$+&c. lorsque x est infiniment petite. »

Le même raisonnement apparaît un peu plus loin dans le même volume des *Opuscules* lorsqu'il dit, dans le Mémoire 28 §II (p. 345), à propos de la cycloïde[148] :

> « on trouvera $x = Cy^{\frac{1}{3}} + \&c.$ & $1 - \cos .x = 1 - \cos .(Cy^{\frac{1}{3}} + \&c.)$. Or il ne paroît pas que cette quantité puisse être changée en une serie de cette forme
>
> $$A' \sin .\pi y + B' \sin .2\pi y + \&c. + C' \cos .\pi y + D' \cos .2\pi y, \&c.$$
>
> car cette derniere quantité a pour premiers termes $E' + F'\pi y + G'\pi^2 y^2$, & ainsi de suite, les puissances de y étant toujours des nombres entiers, au lieu que $1 - \cos .x = 1 - \cos .(Cy^{\frac{1}{3}} + \&c.)$ a pour premier terme $Hy^{\frac{2}{3}}$&c. »

Son idée est donc que le développement en série trigonométrique n'est pas assez général car il implique un développement en série entière, alors qu'une situation où l'on a un point de rebroussement nécessite l'utilisation de puissances fractionnaires.

Nous pouvons donc proposer à ce stade deux premières conclusions :

– A partir du tome IV des *Opuscules*, D'Alembert déduit clairement la non-généralité du développement en série trigonométrique de la non-généralité du développement en série entière.
– Dans la même période, il rassemble des arguments visant à montrer que toute fonction n'admet pas un développement en série entière.

Le premier point peut paraître incongru car nous savons aujourd'hui que l'ensemble des fonctions acceptant un développement en série trigonométrique (notamment au sens de la convergence simple) est bien plus large que la classe des fonctions réelles analytiques[149]. Néanmoins, il faut reconaître à D'Alembert le mérite d'être un des seuls à s'aventurer à donner des raisonnements argumentés sur ce sujet.

---

[148] Signalons que D'Alembert fait ici appel aux équations paramétriques de la cycloïde. Dans sa formulation, x joue le rôle du paramètre, et on a $y = x - \sin(x)$ et $z = 1 - \cos(x)$, qui correspondent respectivement aux coordonnées horizontales et verticales.

[149] Sur ces sujets, v. Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1995 ; ou Claude Zuily, Herve Queffélec. *Elements d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995.

Mais penchons-nous désormais sur les raisons qui amènent l'encyclopédiste à soutenir que toute fonction n'admet pas un développement en série entière et à y accorder tant d'importance à partir du tome IV des *Opuscules*.

Premières inquiétudes à propos des développements en série entière

Déjà au début du XVIII$^{\text{e}}$ siècle, l'étude des courbes algébriques définies implicitement avait permis aux savants de se rendre compte que lorsqu'on tentait de présenter sous forme explicite l'équation de celles-ci, on pouvait avoir besoin de puissances fractionnaires[150]. D'Alembert était inspiré par ce type de résultats, lorsque dans ses « Recherches sur le calcul intégral » de *HAB* année 1746, il envisageait un développement de la forme[151] :

$$y = az^{\frac{m}{n}} + bz^{\frac{r}{s}} + cz^{\frac{t}{u}}...$$

pour exprimer localement la réciproque d'une fonction polynomiale $z(y)$, pour parvenir à démontrer que tout polynôme a au moins une racine du type $a + b\sqrt{} - 1$.

A la même époque, D'Alembert n'ignore pas qu'il existe des fonctions transcendantes particulières qui se refusent à tout développement en série de puissances de x en certains points, même en tolérant des puissances fractionnaires. Un échange épistolaire avec Euler en témoigne. Tentant de trouver une faille dans la preuve du Théorème fondamental de l'algèbre proposée par D'Alembert, Euler lui soumet la difficulté suivante dans sa lettre du 27 Décembre 1748[152]. Il détaille la construction géométrique d'une courbe et dit :

> « Il n'est pas difficile d'exprimer la nature de cette courbe par une équation differentio-differentielle, qui, supposant l'element dt constant, sera $\frac{ddu}{dt^2} = \frac{(1+tt)\,du}{t(1-tt)\,dt} - \frac{u}{1-tt}$. De là il semble d'abord qu'il ne sera pas difficile d'exprimer la valeur de u par une telle series $u = 1 + Att + Bt^4 + Ct^6 + Dt^8 +$ etc.. Mais vous verrés avec bien de la surprise que tous ces coefficiens A, B, C, D etc.. deviennent infinis. »

Il explique enfin l'impossibilité de trouver n tel qu'on ait un équivalent de la forme $y = \alpha x^n$, par allusion au fait que D'Alembert ait envisagé des puissances fractionnaires dans *HAB* année 1746.

D'Alembert lui répond le 12 mai 1749, en montrant qu'au voisinage du point $(u = 1,\, t = 0)$, on peut approximer la solution de l'équation différentielle par l'expression $u = 1 + \frac{t^2}{2}\mathrm{Log}(\frac{B}{t})$[153]. Il en déduit qu'une telle courbe est transcendante et qu'elle ne peut donc pas servir d'argument contre sa preuve.

---

[150] $P(x,y) = x^3 - y^2 = 0$ équivaut à $x = y^{\frac{2}{3}}$.

[151] Dans ses notes du vol. I/4a des *O.C.*, Christian Gilain explique que ce type de développement se trouve déjà chez Newton, et ensuite chez de Gua ou Cramer.

[152] *Leonhard Euler Correspondance Briefwechsel - Opera Omnia*, série IV A, vol. 5, p. 297-299.

[153] Nous avons adapté les notations.

De nouvelles réserves sur le raisonnements formels

Il faudra attendre près d'une vingtaine d'années pour que D'Alembert revienne sur ces réflexions et que, motivé par des travaux de Lagrange, il les exploite sous un jour nouveau. Dans le Supplement 2 du Mémoire 25 des *Opuscules*, il s'intéresse à un long mémoire du savant turinois paru dans le tome III des *Mélanges de Turin*[154], et émet la critique suivante (p. 191) :

> « L'analyse apportée par M. de la Grange en preuve de son sentiment, est fondée sur ce que $\phi(t \pm a)$ peut toujours être supposée $= \phi t \pm ad\phi t + \dfrac{a^2 d^2 \phi t}{2} \pm \dfrac{a^3 d^3 \phi t}{2.3}$: mais je ne crois pas cette supposition exacte ; car soit, par exemple, $\phi(t+a) = [\sin.(t+a)]^{\frac{1}{3}}$; il est visible que cette quantité est toujours finie ; or si on supposoit $[\sin.(t+a)]^{\frac{1}{3}} = \sin.t^{\frac{1}{3}} + \dfrac{ad(\sin.t)^{\frac{1}{3}}}{dt} +$ &c. cette quantité seroit infinie dès le second terme lorsque t seroit $= 0$. »

Une précision est utile à ce stade car un lecteur moderne pourrait penser qu'en autorisant des puissances fractionnaires dans les développements en série, on parle d'une toute autre catégorie de fonctions qui ne seront forcément pas C^∞. D'Alembert ne fait pas ce type de distinctions. Bien qu'il interdise aux fonctions de faire des sauts, une limite infinie en un point ne le dérange pas car ce n'est pas un saut pour lui[155]. C'est pourquoi une généralisation aux puissances fractionnaires lui paraît assez naturelle.

Toujours est-il qu'ayant fait ce premier reproche à Lagrange, D'Alembert va construire les deux premières sections du Mémoire 28 (§I et §II)[156] de façon à montrer les erreurs auxquelles on s'expose en supposant que toute fonction dispose d'un développement en série entière. Dans le 28 §I, il reprend le contenu de la correspondance avec Euler que nous avons évoquée plus haut, ce qui lui permet de montrer qu'il existe des fonctions qui refusent tout développement en série de puissances de x. Dans le 28 §II, il explique que si on tente de résoudre une équation fonctionnelle en supposant les solutions développables en série entière, on perd en généralité et on omet certaines solutions. Il prend l'exemple de l'équation $\phi(x+a) = \phi(x)$, a étant fixé, qu'il résout en adoptant la méthode qu'il combat. Il aboutit à une solution de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{2n\pi x}{a}) + b_n \sin(\frac{2n\pi x}{a}) \right)$ qui, comme nous l'avons vu, n'englobe pas pour lui la cycloïde, qui est pourtant périodique.

D'un point de vue moderne, on doit concéder à l'encyclopédiste que la fonction correspondant à la cycloïde n'est pas analytique au voisinage du point de rebroussement[157] ; en revanche elle est bien la limite de sa série de Fourier. Son dernier

[154] « Solutions de différens problèmes de Calcul intégral », *Mélanges de Turin*, t. III, 1766, p. 179-380 ; *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 471-668.

[155] Il semble en effet concevoir l'∞ comme une quantité ayant un statut comparable à 0.

[156] *Opuscules*, t. IV, p. 342-349.

[157] On peut remarquer que dans le Mémoire 28, les fonctions non analytiques qu'exhibe D'Alembert ne sont pas C^∞. Dans le 28 §I, elle est de classe C^1 sans être C^2, et n'a pas de développement de Puiseux ; et dans le 28 §II, elle est de classe C^0 sans être C^1, mais a un développement avec des puissances fractionnaires.

exemple est donc discutable. Bien qu'il soit juste de souligner que toute solution n'est pas forcément analytique, il ne perçoit pas que la généralité qu'il perd avec cette hypothèse est récupérée en effectuant des sommes infinies des solutions analytiques obtenues.

Précisons maintenant la position de D'Alembert à propos du développement des fonctions en série. L'encyclopédiste n'est pas le seul à avoir conscience que ce n'est pas toujours possible. Dans sa correspondance que nous avons mentionnée, on constate qu'Euler aussi conçoit qu'il y ait des fonctions transcendantes particulières qui échappent à tout développement en séries de puissances de x [158]. Mais il n'en tire pas de conclusions générales sur les méthodes à adopter en Analyse.

C'est en revanche ce que fait D'Alembert en soutenant qu'on ne peut pas supposer systématiquement les fonctions développables en série entière au sein d'un raisonnement. Il y a donc un point commun avec sa position sur les séries divergentes (vue en 1.) : il se montre réservé vis-à-vis des raisonnements purement formels. Mais cette fois-ci, il s'en prend à la possibilité de développer les fonctions en série entière, ou même en série de puissances fractionnaires (Mémoire 28 §I). Comme nous l'avons indiqué au début de cette seconde partie, une origine probable de cette réserve vient du fait que D'Alembert importe des considérations issues de l'étude de courbes particulières dans les usages de l'Analyse.

Remarquons enfin que lorsqu'il se met à manipuler des développements de fonctions pour prouver qu'ils ne sont pas généraux, D'Alembert ne se soucie plus du tout de la convergence de ceux-ci, sujet qui le préoccupait par ailleurs beaucoup comme nous l'avons montré en première partie. Il distingue donc nettement ces deux problèmes, et c'est d'ailleurs pour cette raison que nous avons choisi de découper de la sorte ce chapitre.

Après le tome IV des Opuscules

Dans les tomes suivants des *Opuscules*, D'Alembert maintient cette position et l'invoque de temps à autre mais sans apporter d'arguments très nouveaux. Dans le Mémoire 33[159], il évoque, dans le cadre de recherches très analytiques sur l'équilibre des fluides, les erreurs auxquelles on s'exposerait en écrivant $\phi(x+a)$ sous la forme d'un développement en séries entières. Dans le 35 §II[160], il considère l'expression $[(f+gx)^\delta + K]^p$ (p. 211), et explique qu'on a des conclusions discordantes en fonction de l'ordre dans lequel on effectue les développements, ce qui rend « suspectes [...] les conclusions qui paroissent résulter du développement d'une quantité en serie ».

Dans sa lettre à D'Alembert du 15 août 1768, Lagrange avait émis une objection à propos du Mémoire 28 §II en tentant de montrer que $y^{\frac{2}{3}}$ pouvait s'exprimer sous la

[158] Lettres du 27 décembre 1748 et du 3 janvier 1750.

[159] « Sur l'équation qui exprime la loi du mouvement des fluides », *Opuscules*, t. V, 1768, p. 95-131.

[160] « Sur l'expression de certaines quantités imaginaires, & à cette occasion sur les racines des équations du troisième degré dans le cas irréductible », *Opuscules*, t. V, 1768, p. 183-215.

forme d'une série $\alpha + \beta\cos(y)\gamma\cos(2y)...$[161]. Il en déduisait qu'il en était de même pour la cycloïde. D'Alembert lui répond dans le Mémoire 44 §VII[162] en arguant que les dérivées en 0 des deux fonctions ne coïncident pas, et que donc une telle égalité n'est pas envisageable.

Il revient enfin une dernière fois sur la question dans le Mémoire 58 §VII[163]. Mais cette fois-ci, il développe l'idée que la méthode consistant à développer les fonctions en série entière induit des solutions fausses alors que précédemment, il leur reprochait de ne pas être générales. Il montre par exemple qu'en manipulant à l'envi les développements en question, on peut conclure que toute fonction est solution de l'équation $\phi(x+a) = \phi(x)$. Il nous faut signaler ici que les réflexions de D'Alembert sur la possibilité de développer les fonctions en série entière peuvent parfois sembler perdre en pertinence du fait de son laxisme dans les sommations infinies et dans leur dérivation. Toutefois, son approche a l'avantage de soulever des paradoxes.

3. Conclusion

Nous avons donc montré dans ce chapitre que les réserves de D'Alembert concernant la convergence et l'existence des développements en séries ont plusieurs points communs. D'abord, l'encyclopédiste est amené à les formuler et à les étayer dans le contexte de discussions amicales mais sans concession avec Lagrange. Ensuite, l'origine des inquiétudes et la source des arguments de D'Alembert se situent en marge du strict champ de l'Analyse. Dans le premier cas, il s'inspire de résultats liés à l'utilisation des séries pour l'approximation ; dans le second cas, il emprunte plutôt à la géométrie et à l'étude de courbes. Enfin, dans les deux cas, ses doutes aboutissent à une critique à l'encontre des raisonnements mathématiques excluivement formels.

Nous avons vu également que son rejet de la généralité du développement en série entière a une importance particulière car il fonde, surtout à partir du tome IV des *Opuscules*, son argumentation contre le développement en série trigonométrique. De plus, bien qu'il soit négligé dans l'historiographie, on doit lui reconnaître un certain impact. Prenons juste deux exemples.

Dans des recherches publiées dans les *MARS* année 1769[164], Condorcet fait siennes les positions de D'Alembert sur les séries divergentes et les fonctions refusant tout développement, et il cherche même à aller plus loin. Dans un premier

---

[161] Précisons que la méthode proposée par Lagrange n'a absolument rien à voir avec les méthodes modernes de développement en série de Fourier.

[162] « Sur la maniere d'exprimer certaines fonctions ; addition au Vingt-huitième Mémoire, Tom IV, p.345 », *Opuscules*, t. V, 1768, p. 511-512.

[163] « Remarques sur quelques fonctions », *Opuscules*, t. VIII, 1780, p. 308-310.

[164] « Mémoire sur la nature des Suites infinies, sur l'étendue des Solutions qu'elles donnent, & sur une nouvelle méthode d'approximation pour les Équations différentielles de tous les ordres », *MARS* année 1769 (1771), p. 193-228.

temps, il tente d'élaborer un cadre théorique, en accordant une importance au *reste* d'un développement, comme le montre la citation suivante :

> « Si je prends l'expression analytique de la somme de la suite jusqu'à un terme n, & que je l'appelle S, soit F la fonction réduite en série, & F' qui y étant semblablement réduite donneroit les termes de la première série, postérieurs au terme n, j'aurai $F = S + F'$, & par conséquent il faut que $F' = 0$. »

La suite du mémoire reprend des réflexions de D'Alembert du Mémoire 25 à propos de la série géométrique, et de la somme $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) \ldots$. Puis Condorcet explique les inconvénients de supposer toute fonction analytique et produit une foule d'exemples assez différents dont un n'est autre que celui du Mémoire 28 §II (la résolution de $\phi(x + a) = \phi(x)$).

Nous terminerons en mentionnant un obsevation de Gauss issue de sa première preuve du Théorème fondamental de l'algèbre de 1799[165]. Dans ce texte, il se livre en introduction à un examen des tentatives de ses prédécesseurs, et dit à propos de celle D'Alembert[166] :

> « L'affirmation selon laquelle ω peut toujours être exprimé par une série telle qu'il la propose est certainement fausse, si X[167] peut désigner une fonction transcendante quelconque (comme D'Alembert l'indique en plusieurs endroits). Cela est manifeste, par exemple si l'on pose $X = e^{\frac{1}{x}}$ soit $x = \dfrac{1}{\log(X)}$. »

D'une part, le commentaire entre parenthèses semble montrer que Gauss avait conscience des positions de D'Alembert sur le développement en série des fonctions. Mais cette citation indique également qu'une quinzaine d'années après la mort de l'encyclopédiste, il était en mesure d'envisager l'exemple aujourd'hui connu de tous les étudiants d'une fonction C^∞ non analytique.

---

[165] « Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse », Helmstädt, 1799 ; *Werke* III, p. 1-30.

[166] Traduction Etienne de Lacroix de Lavalette.

[167] ω ou x désignent des réciproques locales de X.

Chapitre 2A : La résolution des équations aux dérivées partielles dans les Opuscules[168]

Dans son mémoire intitulé « Recherches sur le système du Monde », publié dans les *MARS* année 1775, Laplace, l'un des protégés de D'Alembert, rend ainsi hommage à ce dernier pour sa contribution au développement de la théorie des équations aux dérivées partielles[169] :

> « je dois à M. d'Alembert la justice d'observer que, si j'ai été assez heureux pour ajouter quelque chose à ses excellentes *Réflexions sur la cause des vents*, j'en suis principalement redevable à ces Réflexions elles-mêmes et aux belles découvertes de ce grand géomètre sur la Théorie des fluides et sur le Calcul aux différences partielles, dont on voit les premières traces dans l'ouvrage que je viens de citer. Si l'on considère combien les premiers pas sont difficiles en tout genre et surtout dans une matière aussi compliquée ; si l'on fait attention aux progrès immenses de l'Analyse depuis l'impression de son Ouvrage, on ne sera pas surpris qu'il nous ait laissé quelque chose à faire encore et que, aidés par des théories que nous tenons de lui presque toutes entières, nous soyons en état d'avancer plus loin dans une carrière qu'il a le premier ouverte » (p. 91).

Les nombreux articles et ouvrages historiques parus ces vingt-cinq dernières années vont dans le même sens, et s'accordent à juste titre sur le rôle majeur de D'Alembert dans la naissance de cette nouvelle branche des mathématiques permettant d'aborder les problèmes qui relèvent de ce que nous appelons aujourd'hui la mécanique des milieux continus. Les conclusions de leurs auteurs, S. S. Demidov[170], S. B. Engelsman[171], J. Lützen[172] et G. Grimberg[173], sont fondées sur une étude des textes de jeunesse de l'encyclopédiste : le *Traité des Dynamique* (1743), dans lequel la première équation aux dérivées partielles voit le jour, les *Réflexions sur la cause des vents* (1747), les « Recherches sur la courbe que forme une corde tendüe mise en vibration » (*HAB* année 1747), et l'*Essai sur la Résistance des*

---

[168] Ce chapitre est fortement inspiré d'un article soumis par Alexandre Guilbaud et l'auteur de cette thèse à la *Revue d'Histoire des Mathématiques* en avril 2007, et intitulé « La résolution des équations aux dérivées partielles dans les *Opuscules Mathématiques* de D'Alembert (1761-1783) ».

[169] Nous parlons ici d'*équations aux dérivées partielles* par commodité, mais nous reviendrons sur cette expression anachronique dans la suite.

[170] « D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles », *Jean d'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix*, Editions des archives contemporaines, Paris, 1989, p. 333-350.

[171] « D'Alembert et les équations aux dérivées partielles », *Dix-huitième siècle*, n° 16, 1984, p. 27-37.

[172] « Partial differential equations », *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, I. Grattan-Guiness, London, Routledge, 1994, p. 452-469.

[173] *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998.

fluides (1752).

L'invention du calcul aux différences partielles résulte d'un long processus de gestation, initié dès la fin du XVII^e siècle par les recherches de Leibniz, Jacques I, Jean I et Nicolas I Bernoulli sur les familles de courbes dépendant d'un paramètre, puis continué par Euler dans le courant des années 1730 via sa théorie des équations modulaires[174]. L'apport de D'Alembert repose essentiellement, d'après les quatre historiens des sciences évoqués, sur l'introduction de cet outil dans le cadre des sciences physico-mathématiques. Le savant ouvre la voie, grâce à cela, à une nouvelle méthode de mise en équation pour les problèmes du fil pesant, des cordes vibrantes, du mouvement de l'atmosphère, et de l'écoulement des fluides dans les vases et les tuyaux. Cette méthode est d'autant plus innovante, selon S. S. Demidov, qu'elle est complétée, avec plus ou moins de succès suivant la question abordée, par une volonté d'intégrer les équations obtenues, ce qui permet de considérer D'Alembert comme le fondateur de la théorie des équations aux dérivées partielles.

La contribution de D'Alembert à la naissance de cette théorie constitue donc un sujet relativement balisé. Cependant, l'historiographie dont nous avons connaissance se concentre principalement sur la première phase de ses recherches en la matière (1743-1752) : la période des grands traités et des mémoires les plus célèbres, essentiellement avant l'*Encyclopédie*. Dans les huit tomes de ses *Opuscules Mathématiques*, parus entre 1761 et 1780, et dans divers manuscrits non publiés de son vivant, le savant consacre par ailleurs de nombreux mémoires à la continuation de ses travaux dans ce domaine. L'inventaire des équations aux dérivées partielles que nous avons réalisé et que nous vous présenterons à l'occasion de cette étude en témoigne. Ces recherches tardives portent notamment sur la possibilité de « résoudre » les équations aux dérivées partielles précédemment mises à jour. Naturellement, le terme « résoudre », et la démarche à laquelle il renvoie, revêtent un sens particulier dans l'œuvre du géomètre, différent de celui que nous leur accordons de nos jours.

Une étude du vocabulaire employé par D'Alembert, dont nous donnerons le détail, montre que le mot « résoudre » est appliqué spécifiquement aux problèmes de nature physico-mathématique. Dans les mémoires des *Opuscules* dédiés à l'étude des questions des cordes vibrantes et de l'écoulement des fluides, le savant se focalise en effet sur un certain nombre de caractéristiques physiques, notamment relatives à l'état initial et au comportement du système au niveau de ses frontières. Traduites mathématiquement, ces conditions initiales et aux limites, que nous nommerons *équations complémentaires* pour ne pas les assimiler à leur équivalent moderne, sont adjointes à l'équation aux dérivées partielles. C'est en partant de ce nouvel ensemble d'équations que le savant recherche alors les solutions du problème. C'est donc en comprenant comment ces différents éléments s'articulent les uns par rapport aux autres au sein de son raisonnement, que nous parviendrons à comprendre la

[174] V. S. Engelsman : *Family of Curves and the Origin of Partial Differentiation*, North-Holland Mathematics Studies, 93, 1984.

démarche associée au terme « résoudre » et à caractériser la notion de solution des équations aux dérivées partielles dans l'oeuvre de D'Alembert.

Nous reposant sur notre inventaire des équations aux dérivées partielles, nous expliquerons tout d'abord le choix de notre corpus et nous donnerons une première description des écrits centrés sur les questions des cordes vibrantes et de l'écoulement des fluides.

Nous examinerons ensuite l'articulation entre l'équation aux dérivées partielles et les équations complémentaires lors de la phase de recherche de solutions. Nous situerons, à partir de là, l'approche de D'Alembert vis-à-vis des pratiques adoptées en la matière par les mathématiciens des XIX^{e} et XX^{e} siècles.

1. Inventaire des équations aux dérivées partielles dans l'œuvre de D'Alembert

La seconde phase de l'œuvre scientifique de D'Alembert tient essentiellement en neuf volumes d'*Opuscules Mathématiques* : huit volumes publiés entre 1761 et 1780, ainsi qu'un neuvième constitué d'une importante somme de manuscrits presque prêts pour publication mais non parus du vivant de l'auteur. L'ensemble comprend une soixantaine de mémoires, subdivisés en de nombreux paragraphes, soit une bonne centaine de textes portant sur des sujets aussi divers que l'astronomie, la figure de la Terre, les mathématiques pures ou appliquées, la mécanique des fluides, des solides, les cordes vibrantes, l'optique, etc.

Dans ce contexte, l'étude du concept d'équation aux dérivées partielles requiert l'établissement d'un inventaire exhaustif sur lequel nous reposer afin de faire le choix d'un corpus adapté à la question abordée. De cette minutieuse recherche dans les deux phases de son œuvre scientifique, nous livrerons et commenterons le résultat dans cette première partie de l'article. Avant de présenter cet outil de travail, nous écrirons encore quelques mots de la forme sous laquelle le lecteur sera susceptible de voir apparaître une équation aux dérivées partielles dans les textes de D'Alembert et de ses contemporains.

Désignation, formulation

Commençons donc par préciser la désignation et la formulation, au XVIII^{e} siècle, de ce que nous avons aujourd'hui coutume d'appeler les *équations aux dérivées partielles*.

Signalons tout d'abord qu'aucune appellation de ce type n'apparaît dans les travaux de D'Alembert, qu'il s'agisse de ses traités, mémoires, ou de ses contributions à l'*Encyclopédie*. Tout juste est-il question de « différentielle complette » vers la fin de l'article « hydrodynamique », mais rien de plus. Bien que le savant ne rechigne jamais à revendiquer la priorité de ses découvertes, il ne le fait étrangement pas pour cet aspect de son œuvre. Il faut attendre les travaux de Condorcet, Lagrange ou Laplace, au début des années 1770, pour voir souligner le rôle de D'Alembert dans ce domaine, et constater l'apparition de la désignation : « équations aux différences partielles »[175].

Cependant, quoique cette dernière terminologie soit assez proche de la nôtre, il n'en va pas de même de l'aspect sous lequel les EDP apparaissent à cette époque. On peut effectivement distinguer trois types de formulations, résumées et mises en relation sur la FIG. 1[176].

L'équivalence entre ces trois formulations est assurée par l'utilisation répétée du critère, dit d'Euler, selon lequel[177] $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dq}{dx}$ si et seulement si $p(x,t)dx + q(x,t)dt$ est une différentielle complète, ou une forme différentielle exacte, pour employer le terme moderne[178].

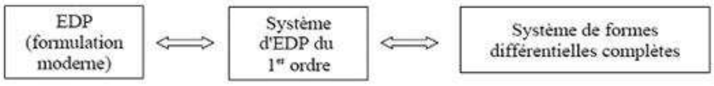

FIG. 1 – Les trois formulations d'une EDP

Précisons que ce critère est d'abord énoncé par Euler, dans le cadre de deux pièces présentées devant l'Académie des Sciences de Pétersbourg le 12 juillet 1734, et publiées en 1740[179]. Clairaut, qui n'a pas encore eu connaissance des travaux de son prédécesseur, propose le même théorème, relativement à des fonctions de plus de deux variables, dans deux mémoires lus en 1739 et 1740 devant l'Académie royale des sciences de Paris[180].

Comme nous aurons l'occasion de le montrer par la suite, ces trois types de formulation sont, à quelques exceptions près, simultanément présentes dans les travaux de D'Alembert. Elles correspondent de fait au chemin emprunté pour intégrer une EDP. Les descriptions de la mise en équation des problèmes de la corde

[175] C'est sous cette appellation que le concept apparaît par exemple dans le « Mémoire sur les équations aux différences partielles » de Condorcet (*MARS* année 1770), dans le mémoire « Sur l'intégration des équations à différences partielles du 1er ordre » de Lagrange (*HAB* année 1772), ou dans le mémoire « Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles » de Laplace (*MARS* année 1773). Dans un souci de lisibilité, nous utiliserons donc invariablement l'abréviation EDP pour désigner une « équation aux différences partielles ».

[176] Les trois exemples figurant sur ce schéma correspondent aux trois formulations relatives au problème des cordes vibrantes. Nous expliquerons précisément plus loin comment on passe de l'une à l'autre.

[177] Conformément aux conventions de l'époque, nous désignerons l'opérateur de différentiation par la lettre d, au lieu de la notation moderne ∂.

[178] Telle qu'il existe, autrement dit, une fonction $y(x,t)$ vérifiant $dy = pdx + qdt$. Ce critère est utilisé comme une équivalence, bien que les preuves qui en sont données à l'époque soient discutables : v. S. Engelsman, *id.*

[179] « De infinitis curvus eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis » et « Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis », *Comm. Acad. Petrop.*, volume 7, 1734 (1740), p. 174-200.

[180] « Recherches générales sur le calcul intégral », *MARS* année 1739 (1741), p 425-436 ; « Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre », *MARS* 1740 (1741), p 293-323.

pincée et de l'écoulement d'un fluide nous donneront plus loin une illustration du rôle et de l'emploi du critère d'Euler dans ce cadre.

Inventaire

Comme nous le précisions à l'instant, l'abord d'un concept dans le corpus dalembertien, notamment la seconde phase des écrits scientifiques du savant, demande un certain nombre de précautions, sans lesquelles il serait facile de passer à côté d'un aspect crucial du sujet. Dans de nombreux cas, certains travaux, apparemment sans lien avec l'objet considéré, peuvent en effet s'avérer tout à fait éclairants, voire indispensables à la bonne compréhension de la démarche de l'auteur. Nous nous sommes donc, avant toute autre chose, employés à établir une liste exhaustive des EDP étudiées ou mentionnées par l'auteur dans l'ensemble de ses travaux, manuscrits ou imprimés. De cette étude préliminaire, il résulte un inventaire que le lecteur pourra consulter en annexe, et dont nous proposons à présent de dire quelques mots, avant d'en extraire les informations servant notre objectif.

Concernant la question de la formulation des EDP, tout d'abord, nous avons dû trancher entre les trois déclinaisons précédemment mentionnées. Nous avons opté pour la forme moderne synthétique, lorsque celle-ci apparaît dans l'œuvre de l'encyclopédiste. Dans la situation contraire, c'est le cas des *Réflexions sur les Causes des Vents*, nous avons présenté l'objet sous la forme d'un système d'EDP du 1^er^ ordre. Nous avons également pris soin de préciser les références de l'imprimé ou du manuscrit concerné, le type mathématique de l'équation, et nous avons enfin formulé quelques remarques visant à éclairer le contexte et la démarche de l'auteur vis-à-vis de chaque équation.

Un premier tour d'horizon de l'inventaire nous montre que les EDP apparaissent dans six types de problèmes physiques :

– le problème du fil pesant,
– le mouvement de l'atmosphère soumise aux influences du soleil et de la lune,
– le problème des cordes vibrantes, en lien avec la question de la propagation du son,
– la résistance des fluides et la question des écoulements dans les vases et les canaux,
– la question de l'équilibre des fluides, en lien avec le problème de la Figure de la Terre,
– la recherche de la courbe tautochrone, c'est-à-dire de la courbe où le temps pris par un corps pour en atteindre le point le plus bas est indépendant de son point de départ.

Les cinq premiers problèmes renvoient d'abord aux premiers ouvrages de l'auteur, à savoir la 1^re^ édition du *Traité de Dynamique* pour le fil pesant, les *Réflexions sur la Cause des vents* pour le mouvement de l'atmosphère, les trois mémoires de l'Académie de Berlin de 1747 et 1750 pour les cordes vibrantes, ainsi que l'*Essai sur la Résistance des fluides* pour ce qui concerne le mouvement, la résistance et l'équilibre des fluides.

Cependant, l'inventaire permet également de voir apparaître une somme de travaux plus tardifs prolongeant chacun des cinq premiers thèmes d'étude précédents et, par là même, les premiers écrits que D'Alembert leur a consacrés. Le tableau ci-dessous consacré à la période postérieure à 1758 permet de se faire une idée de leur ampleur, problème par problème[181] :

• Problème du fil pesant	– *Traité de Dynamique*, 2$^{\text{de}}$ édition, 1758
• Mouvement de l'atmosphère	– *Opuscules*, t. VIII, Mémoire 58 §XII (1780)
• Cordes vibrantes / Propagation du son	– *Opuscules*, t. I, Mémoire 1 (1761) – *Opuscules*, t. I, Mémoire 25 (1768) – *Opuscules*, t. V, Mémoire 34 §II (1768) – *Opuscules* (inédit), Mémoire 59 §VI – *Opuscules* (inédit), Mémoire 59 §VII
• Mouvement des fluides / Résistance des fluides	– *Opuscules*, t. I, 4$^{\text{e}}$ Mémoire (1761) – *Opuscules*, t. V, Mémoire 31 (1768) – *Opuscules*, t. V, Mémoire 32 § I-II (1768) – *Opuscules*, t. V, Mémoire 33 (1768) – *Opuscules*, t. V, Mémoire 34 §I (1768) – *Opuscules*, t. VIII, Mémoire 57 §VII (1780)
• Equilibre des fluides	– *Opuscules*, t. V, Mémoire 30 (1768) – *Opuscules*, t. VIII, Mémoire 56 §I (1780)

A cela s'ajoutent également les écrits où D'Alembert considère les EDP comme un objet d'étude mathématique en tant que tel, indépendamment des problèmes physiques auxquels elles sont attachées. C'est ainsi le sujet des Mémoire 26 (1768) et 58 §VI (1780), de ses *Opuscules Mathématiques*. Nous les évoquerons dans le chapitre suivant.

Concernant la nature mathématique des EDP manipulées par le savant, notre inventaire nous permet de constater qu'il s'agit, dans la plupart des cas, d'EDP linéaires portant sur des fonctions de deux ou trois variables, et dont l'ordre ne dépasse presque jamais 2. Les seules équations non linéaires apparaissent dans les Mémoires 4, 30, 33 et 56 §I des *Opuscules*, mais ne feront pas l'objet d'études mathématiques particulières de la part du géomètre.

Précisons encore qu'outre les nombreuses études portant sur la première phase de ses écrits, plusieurs historiens, spécialistes des EDP, se sont d'ores et déjà ponctuellement penchés sur certains des travaux tardifs dont nous dressions la liste à l'instant. Signalons ainsi que, dans l'état de nos connaissances :

– le Mémoire 58 §VI des *Opuscules*, en lien avec les cordes vibrantes et la

[181] D'Alembert ne consacre qu'un seul écrit à la recherche de la courbe tautochrone dans *HAB* année 1765 (1767). Il s'agit, qui plus est, d'un mémoire plus mathématique que physique. Nous ne le faisons donc pas apparaître dans le tableau ci-dessous.

propagation du son, l'est par Houzel[182] et par Youschkevitch[183]. Quant aux Mémoires 1 et 25, dans lesquels D'Alembert polémique avec Euler, Daniel Bernoulli puis Lagrange sur les cordes vibrantes, ils sont abordés par Burkhardt, Truesdell, Demidov, Szabò[184] et Lützen .
– les Mémoires 4, 31 et 33 des *Opuscules*, concernant l'écoulement des fluides dans les vases et les tuyaux, sont partiellement examinés par C. Truesdell et G. Grimberg, qui en relèvent les principaux résultats.
– le Mémoire 26 des *Opuscules*, traitant des EDP sous un angle exclusivement mathématique, est en partie abordé par C. Houzel.

Pour l'heure, nous nous concentrerons essentiellement sur la question suivante : quelle est la démarche de D'Alembert pour « résoudre » des problèmes faisant intervenir des EDP ? Nous nous restreindrons, pour ce faire, au champ des problèmes physico-mathématiques, seul cadre dans lequel l'auteur recherche des solutions suivant un schéma *apparemment* proche de la démarche des mathématiques modernes.

Pour mieux faire comprendre les raisons de ce choix, quelques précisions concernant la terminologie dalembertienne dans ce domaine sont tout d'abord nécessaires. Le vocabulaire mathématique employé par l'auteur n'est effectivement pas forcément le même qu'aujourd'hui. Il n'est, qui plus est, pas complètement stabilisé.

Le terme d'« équation », par exemple, désigne généralement une égalité sans qu'il y ait de véritable spécification des inconnues, des paramètres ou des variables. Le terme « résoudre », au même titre que celui de « solution », est le plus souvent attaché à un problème au sens large. Il ne correspond pas à la résolution d'une équation mathématique, telle que nous en concevons le sens actuellement, mais recouvre l'ensemble des étapes conduisant de la mise en équation à l'expression d'une solution. Il englobe également l'« intégration » de l'EDP, qui consiste quant à elle, dans le contexte qui nous intéresse, en un simple processus de réécriture, autrement dit en une reformulation de l'EDP par le moyen du critère d'Euler. Centrés sur l'« intégration » des EDP, les écrits purement mathématiques du savant, tels que le Mémoire 26, n'abordent donc pas la question dans son entier. Ils seront conséquemment exclus de notre corpus d'étude.

Les seuls écrits pertinents vis-à-vis de notre sujet correspondent de fait, comme nous le soulignions à l'instant, à l'étude de problèmes de nature physico-mathématique. Le terme « résoudre » y désigne l'ensemble de la démarche du savant face au problème étudié. Il se traduit par une approche dont nous montrerons dans un instant

[182] « Les équations aux dérivées partielles : 1740-1780 », *Analyse et dynamique, étude sur l'œuvre de d'Alembert*, Presses de l'université de Laval, 2003, p. 237-258.

[183] « A propos de l'histoire du débat sur les cordes vibrantes (D'Alembert et l'utilisation des fonctions "discontinues") », *Istoriko-matematitcheskie Issledovania*, 20, 1975, p. 221-231 ; « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle », *Fragment d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P n° 41, 1981, p. 7-68.

[184] *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, 1977, Basel, Boston, Stuttgart, Birkhäuser, 1987.

qu'elle se caractérise par la succession de trois phases souvent entremêlées dans les écrits concernés :

– une première phase de mise en équation du système physique conduisant à l'écriture d'une EDP,
– une seconde phase d'« intégration » de l'EDP,
– suivie d'une phase où le savant introduit d'autres conditions physiques caractéristiques du problème abordé.

Compte tenu de cette description, il faut alors préciser que, dans les *Réflexions sur la Cause des vents*, l'étude mathématique des deux EDP considérées par le savant[185] demeure indépendante de l'étude physique du système dont elles découlent. C'est pourquoi, ce traité, qui a d'ailleurs déjà été examiné par S. Demidov et J. Lützen, nous intéressera peu vis-à-vis de la question que nous souhaitons aborder. Nous exclurons de même les EDP liées à la théorie l'équilibre des fluides et au problème de la courbe tautochrone, puisque D'Alembert ne tente pas de les « résoudre ».

Nous nous intéresserons ainsi essentiellement aux écrits consacrés au mouvement des fluides et aux cordes vibrantes. Ce sont les deux questions dans lesquelles l'approche de D'Alembert correspond véritablement à ce que le savant entend par « résoudre » un problème. Nous allons maintenant étudier comment les trois phases qui la caractérisent se déclinent dans ces deux cas de figure.

2. Premier examen de l'approche de D'Alembert

Le problème des cordes vibrantes

D'Alembert se penche pour la première fois sur le problème des cordes vibrantes dans les mémoires de l'*Histoire de l'Académie des sciences et des belles-lettres de Berlin* des années 1747 et 1750. Dans le Mémoire 1 des *Opuscules Mathématiques*, il revient rapidement sur la mise en équation du problème, et développe plus avant la question de la recherche de solutions. Comme cet écrit constituera, avec le Mémoire 25, le cœur de notre étude dans ce chapitre, nous en résumerons ici les premiers paragraphes.

Le problème consiste à considérer une corde de longueur a fixée en ses deux extrémités A et B. Suite à sa mise en mouvement, il s'agit alors de déterminer la fonction $y(x,t)$ donnant l'ordonnée, c'est-à-dire l'excursion de chaque point de la corde d'abscisse x, à chaque instant t : voir la Fig. 2. Dans l'œuvre de D'Alembert, le problème de la corde vibrante à deux extrémités fixes apparaît sous trois formes distinctes, qui diffèrent par leur état initial :

– La corde est écartée de sa position rectiligne à $t=0$, et lâchée sans vitesse initiale, c'est le cas de la corde pincée.

185 p. 164-172.

– La corde est à l'état rectiligne à $t = 0$, et une vitesse initiale lui est imprimée, c'est le cas de la corde frappée.
– Reste un cas mixte où ni les ordonnées, ni la vitesse initiale ne sont nulles.

Comme nous allons le voir, le choix d'une de ces trois situations intervient après la mise en équation et la première phase de traitement de l'EDP obtenue.

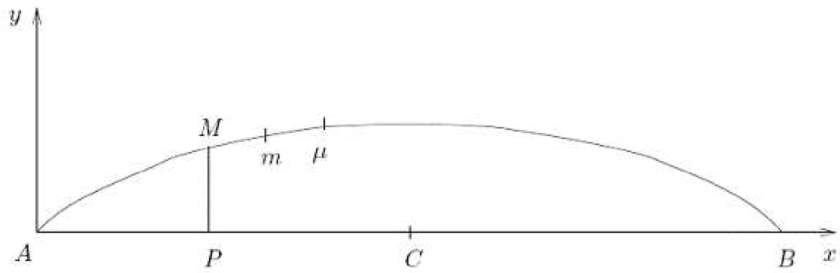

FIG. 2 – Corde AMB fixée entre ses deux extrémités A et B

Afin de mettre en équation le mouvement de la corde, D'Alembert se place avant tout dans l'hypothèse de petites vibrations, ceci permettant de confondre l'abscisse curviligne s et l'abscisse x. Il établit ensuite un lien entre la force retardatrice animant chaque portion infinitésimale de la corde et les termes $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ et $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Il en déduit ainsi, après simplification, l'EDP gouvernant la dynamique du système[186] :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Débute alors la phase d'« intégration » que nous évoquions à l'instant. Pour « intégrer » l'EDP précédente, D'Alembert pose d'une part $dy = pdt + qdx$, avec $p = \dfrac{dy}{dt}$ et $q = \dfrac{dy}{dx}$, l'équation se résumant dès lors au système d'EDP du 1^{er} ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dq}{dx} \\ \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dt} \end{cases}$$

Il applique d'autre part le critère d'Euler, selon lequel cette formulation équivaut à la considération des deux différentielles complètes $qdt + pdx$ et $pdt + qdx$, telles qu'il existe, autrement dit, deux fonctions $u(x, t)$ et $y(x, t)$ vérifiant $du = qdt + pdx$ et

[186] D'Alembert remarque, dès 1747, que l'EDP obtenue peut également représenter les vibrations logitudinales d'une colonne d'air, et donc correspondre à l'équation de la propagation du son. Nous aborderons la question dans la 3[e] partie de l'article.

$dy = pdt + qdx$[187]. L'addition et la soustraction de ces deux expressions conduisent ainsi au système :

$$\begin{cases} dy + du = (p+q)(dt+dx), \\ dy - du = (p-q)(dt-dx). \end{cases}$$

L'intégration (au sens moderne) de chacune des deux différentielles donne alors :

$$\begin{cases} y + u = \Phi(x+t), \\ y - u = \Delta(x-t), \end{cases}$$

nouveau système à partir duquel D'Alembert parvient à l'expression générale[188] :

$$y = \Phi(x+t) + \Delta(x-t).$$

Φ et Δ correspondent ici à ce que nous appellerons par la suite des fonctions arbitraires, c'est-à-dire des fonctions quelconques d'une variable dont la définition, relative aux seules EDP, est similaire à celle des *constantes arbitraires* apparaissant lors de l'intégration d'équations différentielles ordinaires. $y = \Phi(x+t) + \Delta(x-t)$ correspond ainsi à une nouvelle formulation de l'EDP $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ à l'aide de deux fonctions arbitraires. Son obtention clôt la phase d'« intégration ».

D'Alembert revient dès lors au problème physique, caractérisé, comme nous avons déjà eu l'occasion de le préciser, par la fixité des extrémités de la corde en A et en B : le savant pose donc $y(0,t) = 0$ (fixité en A) et $y(a,t) = 0$ (fixité en B). De la première de ces deux équations, il découle $\Phi(t) = -\Delta(-t)$, et la relation $y = \Phi(x+t) + \Delta(x-t)$ s'écrit alors :

$$y(x,t) = \Phi(x+t) - \Phi(t-x).$$

La seconde équation entraîne quant à elle $\Phi(a+t) - \Phi(t-a) = 0$, c'est-à-dire la $2a$-périodicité de la fonction Φ.

Si l'on se place maintenant dans le cadre du problème de la corde pincée comme le fait le savant dans ce Mémoire 1 des *Opuscules*, sa corde peut être représentée à $t = 0$ par la fonction non nulle $y(x,0)$ et une vitesse initiale $\frac{dy}{dt}(x,0) = 0$. Cette seconde caractéristique physique implique la parité de la dérivée de la fonction Φ, et par conséquent l'imparité de Φ.

---

[187] Dans les art. 87 à 89 de ses *Réflexions sur la cause générale des vents*, dédiés à l'« intégration » des deux EDP présentées dans notre inventaire (voir l'annexe, p. 54), D'Alembert suit le chemin inverse, et part donc d'un système de différentielles complètes pour aboutir à un système d'EDP du 1[er] ordre. La démarche d'« intégration » reste cependant identique : il s'agit encore d'une réécriture de l'EDP par le moyen du critère d'Euler, c'est-à-dire d'un passage, dans un sens ou dans l'autre, entre les deux formulations de droite de la FIG. 1.

[188] Le rapport 2, qui découle de l'addition des deux termes, est directement intégré dans les fonctions Φ et Δ.

La solution générale peut alors s'écrire $y(x,t) = \Phi(x+t) + \Phi(x-t)$. Compte tenu du fait que $y(x,0) = 2\Phi(x)$, et puisque la fonction arbitraire Φ est impaire et $2a$-périodique, Φ est donc entièrement déterminée par la position de la corde à l'instant $t = 0$. Nous sommes ici dans le cas très particulier d'une résolution explicite.

L'écoulement d'un fluide dans un vase ouvert en ses deux extrêmités

Pour ce qui concerne l'écoulement des fluides, le processus visant à « résoudre » le problème se décline de même en trois phases.

Avant d'en aborder la description, rappelons préalablement que la première théorie générale du mouvement des fluides remonte à l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli (1738), et qu'elle s'appuie sur une approximation physique consistant à diviser le fluide en tranches parallèles, d'épaisseur infinitésimale, tranches au sein desquelles la vitesse se voit supposée homogène et perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Cette hypothèse, reprise par Jean Bernoulli dans l'*Hydraulique* (1743) et par D'Alembert le *Traité des Fluides* (1744), permet de ramener le problème à une seule dimension d'espace et de travailler sur des équations différentielles ordinaires que les géomètres savent résoudre. Cependant, elle repose sur une approximation trop simplificatrice au regard de l'expérience pour que les hydrodynamiciens ne viennent à douter de sa pertinence.

C'est ce qui poussera D'Alembert à former, dans son *Essai sur la Résistance des Fluides*, une théorie ayant « l'avantage de n'être appuyée sur aucune supposition arbitraire ». Il définit, dans cette optique, les premiers contours de la notion de champ de vitesse pour un écoulement, et tente, à partir de là, la mise en équation du mouvement d'un fluide grâce à l'emploi des EDP... ce qui nous amène au sujet de notre étude.

Si l'*Essai sur la Résistance des Fluides* contient les premiers pas du géomètre dans cette voie, les Mémoires 4 et 31 des *Opuscules Mathématiques* en constituent une prolongation, sur laquelle nous nous appuierons pour présenter les trois phases de la démarche visant à « résoudre » le problème.

La première consiste en la mise en équation du problème physique, à savoir le mouvement plan[189] d'un fluide dans un vase $ABFE$ ouvert en AB et EF, représenté sur la Fig. 3. D'Alembert attribue, pour ce faire, à tout instant t de l'écoulement, deux composantes horizontale et verticale $P(t,x,z)$ et $Q(t,x,z)$ représentant la vitesse d'une « particule très-petite »[190] de fluide $IJKL$, repérée par les coordonnées spatiales (x,z). Cette particule se trouve, selon lui, soumise aux deux principes suivants : la conservation de son volume au cours de l'écoulement,

[189] D'Alembert évoque la question d'un écoulement en trois dimensions dans le Mémoire 4 des *Opuscules*. La méthode, résumée en quelques lignes, y est « parfaitement semblable » à celle proposée par le savant pour le cas d'un écoulement plan.

[190] D'Alembert « suppose (...) qu'un Fluide est un corps composé de particules très-petites, détachées, & capables de se mouvoir librement ».

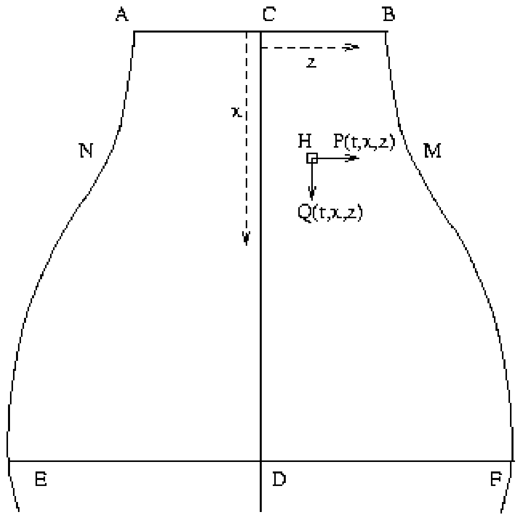

FIG. 3 – Vase $ABFE$ ouvert en ses deux extrémités supérieure et inférieure AB et EF

et le principe de l'hydrostatique. La phase de mise en équation de l'écoulement se décline conséquemment en deux étapes.

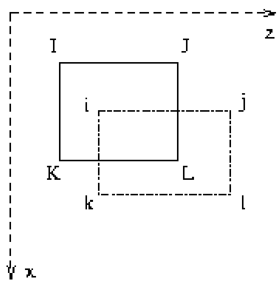

FIG. 4 – Mouvement de la particule H entre les instants t et $t + dt$

1ère étape – le mouvement de la particule rectangulaire $IJLK$ (voir la FIG. 4) est considéré entre deux instant t et $t + dt$, de telle sorte que $IJLK$ devienne $ijlk$ au bout de l'intervalle de temps dt (avec $IK = dx$ et $IJ = dz$). Il obéit de ce fait aux deux relations :

$$\begin{cases} ik = Q(t, x + dx, z) \cdot dt = dx + dx\dfrac{dQ}{dx}dt = dx \cdot \left(1 + \dfrac{dQ}{dx}dt\right) \\ ij = P(t, x, z + dz) \cdot dt = dz + dz\dfrac{dP}{dz}dt = dz \cdot \left(1 + \dfrac{dP}{dz}dt\right) \end{cases}$$

Sachant, d'autre part, que la conservation du volume de fluide de la particule entre les deux instants t et $t + dt$ s'écrit $IK \cdot IJ = dx \cdot dz = ik \cdot ij$, D'Alembert obtient, après avoir négligé les termes d'ordre 2 en dt

$$dxdz = dxdz\left(1 + \frac{dQ}{dx}dt + \frac{dP}{dz}dt\right),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{dQ}{dx}.$$

2$^{\text{de}}$ étape – le principe de l'hydrostatique renvoie quant à lui à ce que les savants de l'époque appellent communément le principe d'« égalité de la pression en tout sens ». Il correspond physiquement, chez D'Alembert, à la condition devant être vérifiée par P et Q afin que l'équilibre de la particule de fluide $IJLK$ se trouve assuré à chaque instant de l'écoulement. Cette condition, selon le savant, revient mathématiquement à considérer la résultante $Pdz + Qdx$ des efforts Pdz et Qdx s'appliquant sur la particule comme une forme différentielle complète[191]. Elle équivaut donc, après application du critère d'Euler, à la relation[192] :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dz}.$$

D'Alembert parvient ainsi à la mise en équation de l'écoulement sous la forme d'un système d'EDP du 1$^{\text{er}}$ ordre[193] :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx}(t,x,z) = \dfrac{dQ}{dz}(t,x,z) \\ \dfrac{dP}{dz}(t,x,z) = -\dfrac{dQ}{dx}(t,x,z) \end{cases}$$

Consécutivement à l'établissement de ces deux équations dans les articles 148 et 149 de l'*Essai sur la Résistance des Fluides*, le savant poursuit en restreignant son cadre d'étude à celui d'un écoulement stationnaire. Il s'agit, autrement dit, de rendre les composantes $P(t,x,z)$ et $Q(t,x,z)$ de la vitesse indépendantes du temps t. Il a, dans ce but, recours à une hypothèse physique dont on verra par la suite qu'elle joue également un rôle fondamental dans la recherche d'une solution au problème. Cette hypothèse se résume à considérer que « le fluide contigu aux parois (...) coule le long de ces parois ». Posant $z = y$ au niveau de BMF et ANE,

[191] Pour une présentation détaillée de la traduction mathématique de ce principe de l'hydrostatique dans l'*Essai sur la Résistance des Fluides*, voir la thèse de G. Grimberg.

[192] Le principe de l'hydrostatique tel qu'appliqué par D'Alembert et formulé ci-dessous, est découvert et démontré par Clairaut dans son ouvrage *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique* (1743). Pour plus de détails à ce sujet, voir la thèse d'Irène Passeron : *Clairaut et la Figure de la Terre au XVIII^{e} siècle - Cristallisation d'un nouveau style autour d'une pratique physico-mathématique*, thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1994.

[193] Ces deux EDP du 1$^{\text{er}}$ ordre correspondent respectivement à ce nous appelons aujourd'hui l'équation caractérisant un écoulement potentiel et l'équation de continuité d'un fluide incompressible. Euler parviendra en 1755 à des équations beaucoup plus générales, non linéaires qui plus est : les célèbres équations d'Euler pour un fluide idéal.

de telle sorte que la fonction $y(x)$ corresponde à l'équation des contours du vase, la relation $\dfrac{Q(t,x,z)}{P(t,x,z)} = \dfrac{dx}{dy}$ liant les composantes de la vitesse en cet endroit, peut en effet, du fait de la fixité de parois, être considérée comme indépendante du temps. Il devient ainsi possible de séparer les variables spatiales et temporelle au sein de la vitesse, et D'Alembert peut donc définir une fonction θ du temps t, telle que, pour toute particule localisée par les coordonnées (x, z) :

$$\begin{cases} Q(t,x,z) = \theta(t) \cdot q(x,z) \\ P(t,x,z) = \theta(t) \cdot p(x,z) \end{cases}$$

Cette restriction à un écoulement stationnaire sera brièvement commentée dans l'article 150 de l'*Essai sur la Résistance des Fluides*, avant d'être beaucoup plus largement discutée par le savant dans les articles 14 à 17 du Mémoire 31 de ses *Opuscules* (t. IV) : de ces interrogations, il résulte selon lui que la séparation des variables peut être admise au moins dans les premiers instants du mouvement. D'Alembert travaillera d'ailleurs exclusivement dans cette hypothèse d'un écoulement stationnaire afin de « résoudre » le problème. Nous considérerons donc, dans tout ce qui suit, le système d'EDP du 1$^{\text{er}}$ ordre auquel se restreint lui-même le géomètre, à savoir :

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dx}(x,z) = \dfrac{dq}{dz}(x,z) \\ \dfrac{dp}{dz}(x,z) = -\dfrac{dq}{dx}(x,z) \end{cases}$$

De même que dans le problème des cordes vibrantes, l'Encyclopédiste entame dès lors la phase d'« intégration », ceci grâce à une technique mathématiquement innovante donnée dans l'*Essai sur la Résistance des Fluides*. Quoique cette méthode soit aujourd'hui fort bien connue des historiens des sciences[194], rappelons toutefois très synthétiquement en quoi elle consiste.

Les relations $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dz}$ et $\dfrac{dp}{dz} = -\dfrac{dq}{dx}$ reviennent, d'après le critère d'Euler, à considérer $pdz + qdx$ et $pdx - qdz$ comme deux différentielles exactes. Les différentielles $qdx + \sqrt{-1}\dfrac{pdz}{\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{-1}pdx + \dfrac{qdz}{\sqrt{-1}}$ le sont donc aussi[195], de même que leur somme et leur différence $(q + \sqrt{-1}p) \cdot \left(dx + \dfrac{dz}{\sqrt{-1}}\right)$ et $(q - \sqrt{-1}p) \cdot \left(dx - \dfrac{dz}{\sqrt{-1}}\right)$.

Ces deux combinaisons linéaires induisent ainsi le changement de variables $u = x + \sqrt{-1}z$ et $v = x - \sqrt{-1}z$, à partir duquel deux nouvelles différentielles exactes $(q + \sqrt{-1}p)dv$ et $(q - \sqrt{-1}p)du$, ou $(p - \sqrt{-1}q)dv$ et $(p + \sqrt{-1}q)du$ sont obtenues. Celles-ci permettent, pour finir, d'exprimer $p - \sqrt{-1}q$ et $p + \sqrt{-1}q$ sous la forme de fonctions quelconques Φ et Δ des variables complexes u et v. Il vient

[194] Voir les références citées de C. Truesdell, G. Grimberg, I. Szabò.

[195] Le terme $\sqrt{-1}$ employé par D'Alembert correspond ici à la quantité i.

ainsi
$\Delta(v) = p - \sqrt{-1}q$ et $\Phi(u) = p + \sqrt{-1}q$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} p = \dfrac{\Phi(u) + \Delta(v)}{2} \\ q = \dfrac{\Phi(u) - \Delta(v)}{2\sqrt{-1}} \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} p(x,z) = \dfrac{\Phi(x + \sqrt{-1}z) + \Delta(x - \sqrt{-1}z)}{2} \\ q(x,z) = \dfrac{\Phi(x + \sqrt{-1}z) - \Delta(x - \sqrt{-1}z)}{2\sqrt{-1}} \end{cases}$$

Ce résultat conduit, dans le même temps, à l'expression des différentielles $pdz + qdx$ et $pdx - qdz$ en fonction de u et v, de telle sorte que :

$$\begin{cases} pdz + qdx = \dfrac{1}{2\sqrt{-1}}[\Phi(u) \cdot (dx + \sqrt{-1}dz) - \Delta(v) \cdot (dx - \sqrt{-1}dz)] = \dfrac{\Phi(u)du - \Delta(v)dv}{2\sqrt{-1}} \\ pdx - qdz = \dfrac{1}{2}[\Phi(u) \cdot (dx + \sqrt{-1}dz) + \Delta(v) \cdot (dx - \sqrt{-1}dz)] = \dfrac{\Phi(u)du + \Delta(v)dv}{2} \end{cases}$$

Cette méthode d'« intégration » par passage dans le champ des complexes présente naturellement de nombreuses similitudes avec celle employée pour le problème des cordes vibrantes. Les systèmes d'EDP du 1$^{\text{er}}$ ordre (1) et (2) respectivement manipulés dans les deux cas de figures diffèrent en effet très peu l'un de l'autre. Il est même fort probable que cette maigre différence, tenant en la présence du signe « $-$ » dans la seconde EDP du système (2), ait justement incité D'Alembert à introduire l'imaginaire $\sqrt{-1}$:

$$(1) \begin{cases} \dfrac{dq}{dx} = \dfrac{dp}{dt} \\ \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dt} \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dz} \\ \dfrac{dp}{dz} = -\dfrac{dq}{dx} \end{cases}$$

Cependant, quoique le savant parvienne à une résolution explicite du problème de la corde pincée, il n'en sera pas de même dans le cas du mouvement d'un fluide. Les conditions physiques associées au système d'EDP dans la troisième et dernière phase de la démarche visant à « résoudre » le problème sont en effet déterminantes dans ce cadre. Elles se traduisent par deux types d'équations complémentaires dans le cas d'une corde vibrante : des équations faisant intervenir la variable d'espace x, et des équations faisant intervenir la variable de temps t. Les deux conditions prises en compte par le savant dans le cas d'un écoulement stationnaire font, quant à elles, intervenir des fonctions de *plusieurs* variables d'espace (x et z). Elles donnent lieu, de ce fait, à un problème autrement plus complexe.

La première de ces deux conditions correspond à la symétrie du vase par rapport à son axe, exprimée, selon les propres termes de l'auteur, par le fait que « la ligne CD divise le vase en deux parties égales & semblables ». De cette symétrie, il découle l'annulation de la composante horizontale de la vitesse en tout point de la droite CD : ce qui revient à poser $p(x,z) = 0$ lorsque $z = 0$.

La seconde coïncide avec l'hypothèse permettant à D'Alembert de restreindre son cadre théorique à celui d'un mouvement stationnaire ; ceci en vertu, rappelons-le, de la contiguïté de l'écoulement au niveau des parois du vase (c'est-à-dire pour $z = y$). La relation qui en découle,

$$\frac{dP(x,z,t)}{dQ(x,z,t)} \mid_{z=y} = \frac{p(x,z)}{q(x,z)} \mid_{z=y} = \frac{dx}{dz},$$

fournit l'équation suivante pour les courbes ANE et BMF :

$$pdx - qdz \mid_{z=y} = 0.$$

Synthèse

Qu'il s'agisse de la question des cordes vibrantes, ou de celle de l'écoulement d'un fluide, il semble que le processus visant à « résoudre » permette effectivement, d'après les descriptions précédentes, de valider un schéma composé de trois phases, synthétiquement représentées sur la Fig. 5.

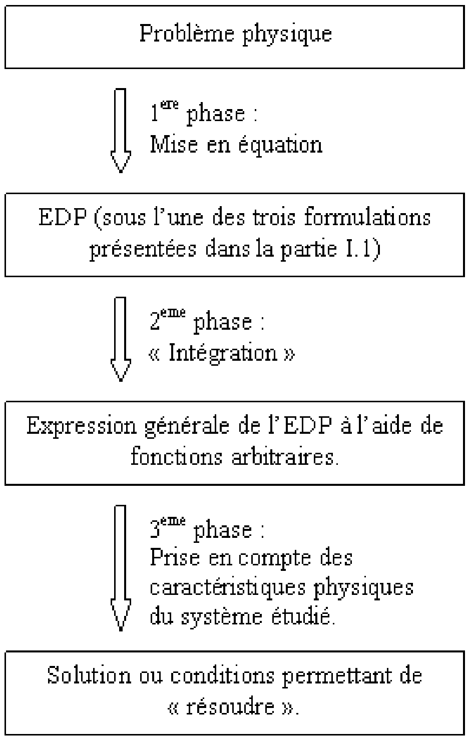

Fig. 5 – La démarche visant à « résoudre » un problème faisant intervenir une EDP

Une première phase de mise en équation du mouvement, sous-tendue par l'application de principes mécaniques, consiste en la traduction du comportement dynamique du système étudié en termes d'EDP.

Au cours d'une seconde phase d'« intégration », D'Alembert part de l'EDP, prise seule, et parvient, via l'application du critère d'Euler, à une nouvelle expression générale formée de fonctions arbitraires.

Dans une troisième phase, la démarche du savant s'étend finalement au-delà du cadre strictement mathématique. Un ensemble de considérations physiques se trouvent en effet prises en compte sous la forme d'équations complémentaires. Ces équations, adjointes à l'expression générale découlant de la phase d'« intégration », forment un nouveau problème dont il ne reste plus, dès lors, qu'à tenter de déterminer les solutions.

Comment D'Alembert procède-t-il dans ce cadre ? Quelles sont les spécificités de sa démarche, et quelle idée se fait-il d'une solution d'un problème faisant intervenir une EDP ? C'est là tout l'objet de la seconde partie de notre étude.

3. « Résoudre » un problème physico-mathématique faisant intervenir une EDP : spécificités de la démarche de D'Alembert.

Nous nous pencherons exclusivement ici sur la troisième phase de la démarche de D'Alembert, au cours de laquelle, nous venons de le voir, le savant se lance dans la recherche de solutions.

Nous commencerons, dans ce cadre, par nous concentrer sur le statut des équations complémentaires dans le problème des cordes vibrantes. Nous réfuterons ainsi l'emploi des termes modernes de conditions initiales et de conditions aux limites pour caractériser ce type d'équations.

Revenant ensuite au problème de l'écoulement des fluides, avant d'achever notre examen de la question des cordes vibrantes, nous remarquerons que la manière de concevoir l'interaction mathématique entre l'EDP et les équations complémentaires est une spécificité de D'Alembert qui a des implications sur le concept de solution. Nous évoquerons enfin la présence des notions d'unicité et d'existence dans l'œuvre du savant. Cette étude nous permettra de comparer l'approche de D'Alembert à celles de ses contemporains comme à celles des futures générations de mathématiciens.

3.1. *Les équations complémentaires*

Dans le Mémoire 1 des *Opuscules*, D'Alembert défend l'idée que la fonction Φ intervenant dans la solution $y(x,t) = \Phi(x+t) + \Phi(x-t)$, « ne doit pas changer de forme », c'est-à-dire d'expression, pour que la solution du problème puisse avoir lieu. Il tente même de le démontrer. Dans le 2^{nd} Supplément du Mémoire 25, il essaie d'apporter de nouveaux arguments en exposant un problème que l'on peut considérer comme une variante du cas classique des cordes vibrantes pincées, mais où les extrémités de la corde deviennent mobiles dès que $t > 0$:

> « Supposons que dans l'instant où la corde se met en mouvement, ses deux extrémités deviennent tout-à-coup mobiles, de fixes qu'elles étoient auparavant » (p. 180).

Peu perturbé par le faible réalisme de la situation, il énonce le résultat suivant :

> « Il n'est pas moins certain qu'on aura $y = \frac{\Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi(x-t)}{2}$, par la condition que $\frac{dy}{dt}$ soit $= 0$ lorsque $t = 0$, quelle que soit x & que la seule condition qu'il y ait à remplir, c'est que $y = 0$ lorsque x & $t = 0$; ce qui a lieu en effet dans l'équation qu'on vient de donner, puisque $x = 0$ donne $\Phi(x)$ ou $y = 0$, lorsque $t = 0$ ».

La méprise de D'Alembert, dans ce passage, est significative à plus d'un égard. Quoique privé de certaines de ses équations complémentaires, le savant pense effectivement encore disposer d'une solution parfaitement déterminée :

$$y = \frac{\Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi(x-t)}{2}.$$

Qu'en est-il en réalité ? Puisque le géomètre ne détaille pas les calculs en cet endroit, nous les mènerons ici à sa place. Ses équations complémentaires sont désormais :

$$\begin{cases} y(0,0) = 0,\ \ y(a,0) = 0, \\ y(x,0) = \Phi(x) \text{ sur } [0,a], \\ \dfrac{dy}{dt}(x,0) = 0. \end{cases}$$

En injectant cette dernière relation dans la solution générale $y = \frac{\varphi(x+t) + \Delta(x-t)}{2}$ de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$, il vient[196] :

$$\varphi'(x) = \Delta'(x),$$

ce qui entraîne, après intégration :

$$\varphi(x) = \Delta(x) + k,$$

avec k constante arbitraire, et permet donc d'écrire, en incluant k dans les fonctions arbitraires :

$$y = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2}.$$

Or, sitôt cette expression obtenue, il apparaît immédiatement que $\varphi = \Phi$, et la solution devient

$$y = \frac{\Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi(x-t)}{2}.$$

Toutefois, cette expression ne représente pas pour autant une solution déterminée du problème gouverné par l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$. La fonction Φ n'est en effet connue

[196] Les fonctions φ' et Δ' représentent les dérivées des fonctions φ et Δ.

et déterminée que sur l'intervalle $[0, a]$, sa périodicité et son imparité étant perdues du fait de la mobilité des extrémités de la corde.

Quelles sont donc, dans ce cadre, les raisons poussant D'Alembert à soutenir la détermination de sa « solution » ? Observons le passage suivant :

> « Si dans cette équation $y = \frac{\Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi(x-t)}{2}$, on se permettoit de faire changer de forme aux fonctions $\Phi(x+t)$ & $\Phi(x-t)$, le problême auroit une infinité de solutions possibles. Car en continuant la courbe initiale (dont l'équation est $y = \Phi x$) par-delà les deux points extrêmes, & lui donnant telle forme qu'on voudroit, sans s'assujettir à l'équation $y = \Phi x$, on satisferoit toujours à l'équation $y = \Phi(x+t) + \Phi(x-t)$, dans laquelle Φx changeroit de forme à volonté, au-delà des deux extrémités de la corde ; cependant il est évident par la nature de la question que le problême ne peut avoir qu'une solution, & que la position initiale de tous les points étant donnée, le mouvement de tous ces points est déterminé & unique »[197]

Pour resituer cet extrait, précisons que l'objectif de D'Alembert dans cette variante du problème des cordes vibrantes est de prouver rigoureusement qu'il est indispensable que Φ ne change pas d'équation sur son ensemble de définition, qu'elle vérifie, autrement dit, un postulat que nous nommerons désormais *permanence de la forme*. Signalons ici que, bien que cette idée ne soit pas partagée par Euler, elle est loin d'être incongrue par rapport aux habitudes de l'époque dans le traitement des problèmes physico-mathématiques.

Pour parvenir à ses fins, D'Alembert affirme que, pour des raisons intuitives liées à son appréhension physique du phénomène, le problème tel qu'il l'a posé doit avoir une solution déterminée, c'est-à-dire unique[198]. Dès lors, pour rendre compte mathématiquement de cette unicité, il explique qu'il faut nécessairement interdire à la fonction Φ de changer d'expression, sinon celle-ci peut prendre n'importe quelle valeur en dehors de l'intervalle $[0, a]$. En somme, son raisonnement est le suivant : Φ étant déterminée sur $[0, a]$, elle doit l'être également partout puisqu'il y a permanence de la forme. Ce n'est donc qu'au prix de l'introduction d'un postulat arbitraire qu'il récupère une solution déterminée. Bien entendu, il ne prétend pas que la fonction Φ reste impaire et $2a$-périodique, et ce n'est évidemment pas le cas. Erroné d'un point de vue moderne du fait de la permanence de la forme, le raisonnement du savant n'en reste pas moins scrupuleusement cohérent.

Au-delà de cet aspect, ce problème présente l'intérêt de montrer que les termes de conditions initiales et conditions aux limites ne sont pas adaptés à ce que fait D'Alembert, car ce dernier n'a pas une idée claire du nombre de conditions nécessaires mathématiquement. C'est l'une des raisons pour lesquelles il nous paraît justifié de parler d'équations complémentaires, plutôt que de conditions initiales et de conditions aux limites. Cette question du dénombrement des conditions nécessaires, qui suscitera des interrogations dès la fin du XVIII[e] (Laplace, Monge), restera longtemps un problème délicat, car la réponse dépend de la structure de

---

[197] Mémoire 25, p. 181.

[198] L'unicité à laquelle nous faisons ici référence, celle de D'Alembert, ne doit pas être confondue avec la notion moderne. Nous reviendrons précisément sur cette question dans la partie 2.3.

l'EDP, de son ordre et du nombre de variables.

A cela s'ajoute un argument tiré de notre étude préliminaire de la démarche de D'Alembert (2.). Nous avions pu constater qu'il commence par étudier l'EDP, prise seule (phase « d'intégration »), avant de confronter ce qu'il obtient aux équations tirées des caractéristiques physiques du problème, les équations complémentaires autrement dit. Au cours de ce processus, il ne pose évidemment pas le problème tel que nous le ferions aujourd'hui, mais semble considérer que l'EDP et les équations complémentaires ont le même statut, comme dans un système ordinaire d'équations. Ce dernier point nous conforte dans notre décision d'utiliser le terme d'équation complémentaire à la place de ceux de conditions initiales et aux limites.

3.2. *Les interactions entre l'EDP et les équations complémentaires*

L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE DANS UN VASE OUVERT EN SES DEUX EXTRÊMITÉS

Après avoir précisé le statut des équations complémentaires, intéressons-nous au rapport qu'elles entretiennent avec l'EDP, ainsi qu'au rôle qu'elles jouent dans le cadre de la recherche de solutions. Revenons, pour ce faire, sur la question de l'écoulement des fluides. Comme nous le précisions dans la première partie, D'Alembert pose explicitement deux équations complémentaires :

– $pdx - qdz \mid_{z=y} = 0$, traduisant la contiguïté de l'écoulement au niveau des parois du vase,
– et $p(x, z) \mid_{z=0} = 0$, découlant de la symétrie du vase par rapport à son axe CD.

Ces deux équations sont naturellement à rapporter, comme nous l'avons vu, à l'expression générale des composantes horizontale et verticale de la vitesse (résultant de l'« intégration » du système d'EDP du 1^er^ ordre) :

$$\begin{cases} p(x,z) = \dfrac{\Phi(x+\sqrt{-1}z) + \Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2} \\ q(x,z) = \dfrac{\Phi(x+\sqrt{-1}z) - \Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2\sqrt{-1}} \end{cases}$$

Vis-à-vis de la seconde équation complémentaire, D'Alembert propose le raisonnement suivant :

> « Lorsque $z = 0$, on a $\Phi(x + z\sqrt{-1}) + \Delta(x - z\sqrt{-1}) = 0$; donc $\Delta x = -\Phi x$; donc $\Delta(x - z\sqrt{-1}) = -\Phi(x - z\sqrt{-1})$ ».

Partant de $p(x, z) \mid_{z=0} = 0$, et sachant que $p = \dfrac{\Phi(x+\sqrt{-1}z) + \Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2}$, le savant parvient autrement dit à la relation fonctionnelle

$$\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x - \sqrt{-1}z) \mid_{z=0},$$

c'est-à-dire $\Delta(x) = -\Phi(x)$.

La seconde déduction le conduisant à

$$\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x - \sqrt{-1}z),$$

pose cependant plus de problèmes, et nous incite à faire deux remarques.

1°. Ce raisonnement revient tout d'abord à passer d'une relation fonctionnelle valable sur le champ des nombres réels, à son équivalent sur le champ des nombres complexes. Quoique cela ne se rapporte qu'indirectement au sujet de notre étude, notons en effet que D'Alembert l'applique ici dans l'hypothèse, implicite à cette époque, où les fonctions Φ et Δ sont généralement considérées comme étant développables en séries polynomiales ou trigonométriques. Les mathématiques modernes, quant à elles, se pencheraient sur cette question via la théorie des fonctions d'une variable complexe, théorie jouant en effet un rôle essentiel dans l'étude des écoulements potentiels bidimensionnels. C'est ainsi l'occasion de préciser que ces travaux de D'Alembert (les Mémoires 31 et 33) contiennent un certain nombre d'éléments allant dans ce sens. Citons par exemple l'idée entrevue dans la première partie, consistant à passer aux « nombres imaginaires » afin de manipuler les fonctions $p(x, z)$ et $q(x, z)$ vérifiant le système d'EDP [199]. Le savant s'y interroge également sur la dérivabilité d'une fonction complexe, pose les prémices de la notion de potentiel complexe pour un écoulement potentiel bidimensionnel (voir la thèse de G. Grimberg, p. 55-58). Il propose, en un mot, tout un ensemble de pistes de recherches dans ce domaine, dont certaines restent encore à étudier de plus près.

2°. D'autre part, dans ce passage de $\Delta(x) = -\Phi(x)$ à

$$\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x - \sqrt{-1}z),$$

D'Alembert étend mathématiquement une propriété locale, initialement définie pour $z = 0$, à l'ensemble des particules de fluide (x, z) s'écoulant dans le vase.

Ce raisonnement pourrait n'avoir mérité aucun commentaire, si le savant avait physiquement traduit la propriété de symétrie du vase, en remarquant qu'au-delà de l'annulation de la composante verticale de la vitesse sur l'axe, la symétrie implique également la relation $p(x, -z) = p(x, z)$ en tout point de l'écoulement. De là, sachant que

$$p = \frac{\Phi(x + \sqrt{-1}z) + \Delta(x - \sqrt{-1}z)}{2},$$

il aurait pu déduire $\Delta(x + \sqrt{-1}z) = \Delta(x - \sqrt{-1}z)$, qui ne correspond évidemment pas à la relation induite par son raisonnement.

La déduction proposée n'a donc rien à voir avec la traduction d'une propriété physique de l'écoulement. Elle consiste au contraire en une manipulation exclusivement mathématique de l'équation complémentaire de départ,

$$\Phi(x + \sqrt{-1}z) + \Delta(x - \sqrt{-1}z) = 0$$

[199] Ce système correspond d'ailleurs à ce que nous appelons aujourd'hui les conditions de Cauchy-Riemann.

laquelle lui permet d'aboutir à $\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x - \sqrt{-1}z)$, ou $\Delta(v) = -\Phi(v)$ (rappelons que $u = x + \sqrt{-1}z$ et $v = x - \sqrt{-1}z$).

Cette relation $\Delta(v) = -\Phi(v)$, D'Alembert la rapporte ensuite à la première des deux équations complémentaires $pdx - qdz \,|_{z=y} = 0$.

Sachant que l'expression $\dfrac{\Phi(u)du + \Delta(v)dv}{2}$ de la différentielle $pdx - qdz$ pour $z = 0$ conduit tout d'abord à l'équation des parois du vase

$$\Phi(u)du + \Delta(v)dv = 0,$$

l'injection de la relation $\Delta(v) = -\Phi(v)$ lui permet effectivement d'obtenir :

$$\Phi(u)du - \Phi(v)dv = 0,$$

soit encore, après intégration :

$$\Gamma(u) - \Gamma(v) = M,$$

M et Γ désignant respectivement une constante arbitraire et une primitive de la fonction Φ.

D'Alembert parvient ainsi à la forme générale de l'équation des contours de ce vase. Nous observons d'autre part que la relation $\Gamma(u) - \Gamma(v) = M$ correspond manifestement, dans son idée, à une expression analytique compatible avec les deux équations complémentaires associées au système d'EDP. Pour ce qui est du rôle que le savant lui attribue, la réponse ne tarde pas à venir :

> « Ainsi le Problême ne pourra être résolu, toutes les fois qu'on ne pourra donner à l'équation de la courbe BMF [désignant la paroi du vase] la forme $\Gamma u - \Gamma v = M$ » (Mémoire 4, p. 140).

Afin d'illustrer son propos, il propose l'exemple d'un vase dont la paroi BMF répondrait à l'équation $x + y = a$, avec a constante :

> « Pour faire sentir un exemple très-simple de la vérité de ce que nous avonçons, soit, par exemple, $x + y = a$, l'équation de la courbe BMF, qui sera pour lors une ligne droite au portion de ligne droite (...) ; on aura en substituant pour x & y leurs valeurs $\dfrac{u+v}{2}$ & $\dfrac{u-v}{2\sqrt{-1}}$ l'équation
>
> $$= u\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) + v\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) = a,$$
>
> qui ne peut être réduire à cette forme $\Gamma u - \Gamma v = M$, puisqu'il faudroit qu'on eût
>
> $$= u\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) + v\left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) = a \text{ ».}$$

Dans ce cas de figure, le problème ne possèdera donc pas de solution, parce que l'équation $x + y = a$ ne peut se mettre sous la forme $\Gamma(u) - \Gamma(v) = M$: elle ne répond pas, autrement dit, à la condition découlant des restrictions imposées par la prise en compte des équations complémentaires.

L'équation $\Gamma(u) - \Gamma(v) = M$ conditionne donc la possibilité de résoudre le problème[200]. Il ne s'agit pas ici d'une exigence liée à la permanence de la forme, mais d'une nécessaire compatibilité entre l'équation de la paroi du vase, considérée comme une donnée du problème, et la forme $\Gamma(u) - \Gamma(v) = M$ que requiert la prise en compte de l'EDP et des deux équations complémentaires. Ces deux équations complémentaires, mathématiquement réunies en une expression analytique de la paroi, rentrent ainsi en conflit avec le système d'EDP du 1^er^ ordre auxquelles elles sont initialement adjointes. C'est là une conclusion dont le savant ne déroge pas dans ses écrits ultérieurs. Citons pour preuve un passage extrait du Mémoire 33 de ses *Opuscules* :

> « Pour pouvoir déterminer analytiquement le mouvement d'un fluide dans un vase, il faut que la figure de ce vase soit assujettie à une certaine équation, dépendante de la forme de $[\Phi x]$ » [201]

Cette conclusion n'est d'ailleurs pas spécifique à ces deux équations complémentaires. Dans la suite du Mémoire 4, le géomètre ajoute en effet :

> « Il faut que cette nouvelle équation de [la surface supérieure du fluide] s'accorde avec celle qui a été trouvée précédemment (...). Si elles sont différentes, & si l'une ne peut être réduite à l'autre, c'est une marque que la solution analytique du Problême est impossible. Ce n'est pas tout ; ce que nous avons dit de la surface supérieure, doit avoir lieu de même pour la surface inférieure ; nouvelles conditions qui limitent encore davantage la solution du Problême (...).
> On voit par-là qu'il y a bien peu de cas où l'on puisse trouver analytiquement & rigoureusement le mouvement d'un fluide dans un vase »[202]

D'Alembert s'intéresse ici aux deux surfaces libres du fluide AB et EF (voir la Fig. 3). Il évoque, sans toutefois les formuler, les nouvelles équations complémentaires relatives au comportement de l'écoulement au niveau de ses frontières supérieure et inférieure, nouvelles équations dont il pense qu'elles restreindront encore ses chances de pouvoir résoudre la question.

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide dans un vase ouvert en ses deux extrémités, sa démarche fait donc apparaître le problème comme un système d'équations à résoudre. Les différentes équations complémentaires et l'EDP qui le constituent doivent être mathématiquement compatibles afin que la résolution soit possible. Une telle situation, comme nous allons le voir dans un instant, existe également au sein de ses recherches sur le problème des cordes vibrantes.

Permettons-nous juste de noter, avant ceci, qu'une nouvelle idée apparaît dans ces deux dernières citations du géomètre. Ce dernier n'envisage effectivement pas de solution autre qu'analytique, c'est-à-dire représentable par une expression fonction-

[200] La *possibilité de résoudre* renvoie, dans les travaux de D'Alembert, à la notion d'existence d'une solution, tout du moins telle que ce dernier la conçoit. Nous reviendrons précisément là-dessus dans la partie 3.3.

[201] Mémoire 33 §I, p. 96-97.

[202] Mémoire 4, p. 145.

nelle explicite. Il s'agit là d'un élément caractéristique de sa façon d'appréhender le concept de solution, sur lequel nous ne manquerons pas de revenir.

La polémique entre D'Alembert et Euler sur les cordes vibrantes

Nous avons précédemment mentionné, sans trop entrer dans le détail, le rejet des « sauts de courbure » par D'Alembert, et le lien que cette exigence entretenait avec le postulat de permanence de la forme. Revenons à présent sur le cas classique d'une corde pincée, c'est-à-dire fixée en ses deux extrémités, écartée de son état de repos, puis lâchée avec une vitesse nulle à l'instant $t = 0$. La résolution proposée[203] conduisait à la solution $y = \Phi(x + t) + \Phi(x - t)$. La fonction Φ, impaire et $2a$-périodique du fait de la fixité des extrémités, se voyait entièrement déterminée par l'allure initiale de la corde et correspondait à l'équation complémentaire $y(0, x) = 2\Phi(x)$, pour x dans $[0, a]$.

De l'avis du savant, la possibilité de résoudre le problème dépend, à ce stade, des propriétés de « régularité » de cette fonction Φ. Cette question constitua le cœur d'une célèbre polémique avec Euler, dont il nous faut à présent dire quelques mots. Dans un mémoire inédit de 1755, pièce préparatoire au Mémoire 1 des *Opuscules*, D'Alembert résume la querelle en ces termes :

> « Nous différons en ce que M. Euler tire de cette équation $[y = \Phi(x + t) + \Phi(x - t)]$ une construction qu'il prétend s'appliquer à toutes sortes de courbes, au lieu que j'ay prétendu que cette équation ne pouvoit s'appliquer qu'à certaines courbes, et que dans les autres cas la solution analytique et rigoureuse du problême étoit impossible ».

Le savant consacre effectivement un passage important du Mémoire 1 (p. 17-29) à démontrer que les fonctions Φ impaires, $2a$-périodiques (définies sur $]-\infty, +\infty[$) et présentant des « sauts de courbure », doivent être exclues de l'ensemble des solutions admissibles. Il décrit ainsi les fonctions qui pourront être tolérées :

> « Ainsi la construction de M. Euler n'a pas lieu, toutes les fois que la courbure de la courbe AMB fait un saut en quelque point M, ou qu'elle n'est pas nulle, tant en A, qu'en B. Aucun de ces deux inconvéniens n'a lieu dans ma solution ; car lorsque les courbes AMB (...), $B\mu a$, Amb &c. sont assujetties à une même loi, 1°. la courbe AMB n'a point de sauts dans sa courbure, puisque tous ses points sont assujettis à une même équation ; 2°. la courbure en A & en B est nulle, puisque la similitude des parties AMB, $B\mu a$, Amb &c. donne à la courbe (supposée continue) un point d'infléxion en A & un en B, ensorte que la courbure est nulle en ces deux points. »[204]

Plus précisément, il nous faut ici distinguer deux étapes.

1°. Dans un premier temps, D'Alembert montre que la courbe initiale Φ prolongée, c'est-à-dire rendue impaire et $2a$-périodique, ne doit pas faire de « sauts de courbure ». Les raisons invoquées pour étayer ce critère sont de trois natures :

– analytique : les différentielles secondes en x intervenant dans l'équation régissant le phénomène, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, ne peuvent être calculées pour les points

[203] Dans *HAB* année 1747, p. 230-231, ou encore dans le Mémoire 1, p. 2-7.

[204] Mémoire 1, p. 28.

présentant un « saut de courbure ».
- physique : la détermination de la force accélératrice, liée à cette différentielle seconde, présente la même difficulté.
- métaphysique : quoiqu'elle ne soit pas générale, la loi de continuité, selon laquelle « la nature de la force accélératrice est de croître ou de décroître par degrés insensibles, & non brusquement & par sauts », doit cependant s'appliquer dans ce cas.

2°. Dans un second temps, D'Alembert s'attache à prouver que cette absence de « sauts de courbure » équivaut au fait que la fonction Φ prolongée soit « assujettie à une même loi » ; qu'elle conserve, autrement dit, la même expression sur l'ensemble des réels. C'est l'idée de permanence de la forme que nous avons déjà évoquée.

Dans le cas où la fonction Φ ne répondrait pas aux exigences requises, l'encyclopédiste affirme, dès 1750, qu'une telle situation « surpasse les forces de l'analyse connües »[205]. D'un point de vue moderne, on peut trouver raisonnable d'exiger l'absence de sauts de courbure, car cela correspond à la notion de solution exacte ou stricte. En revanche, son équivalence avec la permanence de la forme est évidemment fausse car on peut raccorder des fonctions d'expressions différentes de telle sorte que leur dérivée seconde soit continue, et donc ne fasse pas de sauts.

Comme nous l'avions constaté sur la question de l'écoulement des fluides, nous retrouvons ici l'existence de « conflits » entre les équations complémentaires et l'EDP, ou l'expression générale qui en découle à l'issue de la phase « d'intégration ». Cela constitue la spécificité de l'approche de D'Alembert par rapport à ses contemporains. Ces conflits peuvent être liés aux sauts de courbure de la fonction représentant l'allure initiale de la corde, ou au fait que celle-ci viole un postulat en partie extérieur à l'analyse : la permanence de la forme. Dans le premier cas, on peut juger le point de vue de D'Alembert pertinent, et dans le second cas, il est très discutable.

Il n'en reste pas moins que cet état de fait le conduit à un certain pessimisme quant à sa capacité de venir à bout des deux problèmes évoqués.

Dans la question de l'écoulement des fluides, nous avons vu que le problème, selon D'Alembert, ne peut être résolu si les rapports qu'entretiennent l'EDP et ses équations complémentaires ne permettent pas d'aboutir à une solution analytique. Quoique cette dernière notion coïncide avec la nôtre, nous savons néanmoins aujourd'hui que la résolution explicite de ce genre de problèmes représente un cas de figure assez rare : les mathématiciens sont, le plus souvent, contraints de recourir à une résolution approchée du problème via l'application de méthodes numériques adéquates. Il n'y donc rien d'étonnant à ce que la démarche du savant, fondée sur la recherche de solutions explicites, ne le mène à un système d'EDP et d'équations complémentaires analytiquement « intordable ».

Dans le problème des cordes vibrantes, l'idée de D'Alembert selon laquelle la généralité d'une solution dépend de sa compatibilité avec différents types d'équa-

---

[205] On retrouve cette expression dans *HAB* année 1750, p. 358 et dans le Mémoire 1, p. 38.

tions complémentaires, n'a également rien d'aberrant d'un point de vue moderne. Cependant, les problèmes d'irrégularité auxquels D'Alembert se trouve confronté le poussent à conclure à l'impossibilité de « résoudre ». Dans de semblables situations, les mathématiciens envisageraient aujourd'hui la recherche de solutions moins régulières, ou solutions faibles, via la définition de nouveaux espaces fonctionnels dotés de conditions de régularité adéquates.

Aussi, ces deux démarches de s'avèrent nécessairement infructueuses, parce que le cadre mathématique conceptuel dans lequel D'Alembert se débat, et la nature même des problèmes abordés, ne lui permettent, pas, en l'état, d'obtenir des « solutions » telles qu'il en conçoit les contours dans son œuvre. Elles n'en recèlent pas moins un grand nombre d'idées innovantes : l'étude des rapports à l'EDP et les équations complémentaires, le passage dans le champ des nombres complexes en hydrodynamique, ou encore ses réflexions sur la « régularité » admissible d'une solution.

3.3. *Caractérisation de la démarche de D'Alembert*

Unicité de la solution

Nous avons précédemment évoqué (3.1) le cas d'une corde vibrante dont on lâche les deux extrémités à $t = 0$, cas de figure abordé par D'Alembert dans le Mémoire 25 de ses *Opuscules* (p. 180-184). Persuadé que ce problème devait avoir une solution déterminée, le savant l'avait utilisé pour justifier le postulat selon lequel une fonction ne doit pas changer d'expression sur ce qu'on appellerait aujourd'hui son ensemble de définition. Il s'exprimait alors en ces termes :

> « cependant il est évident par la nature de la question que le problême ne peut avoir qu'une solution, & que la position initiale de tous les points étant donnée, le mouvement de tous ces points est déterminé & unique. »[206]

Cette phrase, emblématique du point de vue de l'auteur, nous permet de clarifier la notion d'unicité de la solution chez D'Alembert. Il déduit le caractère « unique » d'une solution grâce à deux types d'arguments :
- la constatation qu'un phénomène physique précis se produit,
- ses intuitions quant aux facteurs déterminant ce phénomène, ou, en d'autres termes, ce qui fait qu'un phénomène se produit plutôt qu'un autre.

Le premier argument pourrait être qualifié d'empirique, si les problèmes envisagés par D'Alembert ne correspondaient pas le plus souvent, comme ici, à des situations théoriques sans vérification expérimentale possible. Le second relève d'intuitions plus ou moins pertinentes concernant les équations complémentaires, leur nombre et leur nature. Fondamentalement, l'unicité de la solution émerge donc d'une forme de déterminisme physique implicitement associée à la nature physico-mathématique de ses recherches.

---

[206] Mémoire 25, p. 181.

Existence ou possibilité de déterminer la solution

La situation est semblable pour ce qui concerne la notion d'existence. Le rôle des considérations physiques est prépondérant : le simple fait, selon lui, qu'un phénomène ait lieu garantit l'existence d'une solution. On ne rencontre d'ailleurs pas de polémiques entre D'Alembert et ses contemporains autour du concept moderne équivalent. De plus, et contrairement aux mathématiciens actuels, l'encyclopédiste ne s'intéresse pas à l'existence abstraite d'une solution, mais plutôt à la *possibilité de résoudre*, notion que nous allons maintenant tenter d'éclaircir.

D'Alembert a conscience qu'une solution peut exister, sans qu'il dispose pour autant des outils mathématiques lui permettant de l'expliciter. Dans ses mémoires sur les cordes vibrantes, il répète en effet régulièrement à partir de 1750 :

> « dans plusieurs cas le Probleme ne pourra être resolu, & surpassera les forces de l'analyse connue. »[207]

Essayons donc de comprendre ce que le savant entend par *possibilité de résoudre*. Voyons cela sur deux citations extraites de ses recherches sur l'écoulement des fluides :

> « Le vase doit avoir une certaine figure pour que le mouvement du fluide puisse être représenté par une formule analytique. »[208]

> « Pour pouvoir déterminer analytiquement le mouvement d'un fluide dans un vase, il faut que la figure de ce vase soit assujettie à une certaine équation, dépendante de la forme de φx, forme qui dépend elle-même de la condition $\varphi(b+u) \pm \varphi(b-u) = 0$. »[209]

On remarque que D'Alembert y emploie les termes de « formule analytique » et de « détermination analytique », lesquels correspondent à la notion moderne de solution analytique, ou explicite, que l'on peut, autrement dit, exprimer à l'aide de fonctions usuelles[210]. Les méthodes qu'il propose visent donc uniquement à l'obtention d'une formule ou d'une équation, seules formes sous lesquelles la « solution » puisse exister selon lui.

En somme, la possibilité de résoudre peut revêtir deux sens, qui ne s'excluent pas mutuellement, et ne sont pas nécessairement distingués par D'Alembert :

- la capacité à « résoudre » avec les outils mis à disposition par l'Analyse du moment,
- la possibilité d'expliciter la « solution » à l'aide de fonctions, que l'on dirait aujourd'hui usuelles.

Il y aura donc *impossibilité de résoudre* lorsque :

- l'Analyse s'avère incompétente à l'état présent. C'est l'argument invoqué par le savant lorsqu'il se trouve confronté à des problèmes du type de ceux évoqués

[207] Mémoire 1, p. 38.

[208] Mémoire 31, p. 42.

[209] Mémoire 33, p. 96-97.

[210] Rappelons qu'une solution analytique s'exprime explicitement à l'aide de fonctions usuelles. Le terme analytique n'a pas le même sens ici que lorsque l'on parle d'une fonction analytique, qui se développe localement en une série entière convergente.

en II-2, qu'il s'agisse de problèmes d'irrégularité des équations complémentaires, ou d'incompatibilité de ces équations avec l'EDP ;
– il n'existe pas de solution pouvant être exprimée à l'aide de fonctions usuelles et l'Analyse est définitivement incompétente. Le cas d'une courbe tracée arbitrairement pousse ainsi le savant à conclure :

> « Donc si la courbe initiale est tracée au hasard, & n'a point d'equation, [...] la solution ne pourra avoir lieu »[211]

Bien que D'Alembert ne s'intéresse pas à l'existence d'une solution, qu'il ne serait pas apte à déterminer, précisons cependant qu'il n'hésite pas à envisager des stratégies alternatives lorsque la sienne se trouve mise en défaut. Confronté à certaines situations délicates dans le problème des cordes vibrantes, il explique ainsi, dès 1747, qu'il :

> « n'y a donc point autre chose à faire, que de chercher le mouvement de la corde, en la regardant comme composée d'un grand nombre de points, unis ensemble par des fils extensibles. »[212]

Il applique cette stratégie pour quelques cas simples, mais ce sera surtout Lagrange qui y en fera usage dans ses « Recherches sur la nature, et la propagation du son ». Dans la polémique des années 1750, ce dernier y poursuivra d'ailleurs l'objectif de conforter, du moins dans un premier temps, le point de vue d'Euler contre celui de D'Alembert.

Synthèse et mise en perspective

La démarche dalembertienne est donc simultanément marquée par un attachement profond aux expressions formelles des fonctions, au détriment notamment de leur représentation géométrique, ainsi que par une très forte imbrication entre l'Analyse et les considérations émanant de la physique. Le premier de ces deux aspects conduit l'encyclopédiste à nourrir un certain pessimisme quant aux moyens lui permettant de venir à bout des problèmes abordés. Et la réunion de ces deux aspects constitue la spécificité de son approche. Bien qu'elle soit parfois sous-estimée par certains historiens et qu'elle puisse paraître incongrue à un regard moderne, cette démarche ne restera pas sans répercussions. Avant de nous pencher sur un exemple particulier de celles-ci, nous pouvons dresser un panorama général de la postérité des différents aspects de la démarche du savant.

Tout d'abord, l'imbrication entre mathématiques et physique telle que la concevait D'Alembert laissera la place à une plus nette distinction, par ses successeurs directs, entre l'étape de traitement physique du problème et la phase mathématique d'étude de l'équation. Néanmoins, il serait hâtif de conclure que ces aspects resteront à jamais disjoints. Si nous nous penchons par exemple sur le rôle du déterminisme physique dans l'approche moderne, nous observons que son lien avec la notion d'unicité dans l'approche de D'Alembert n'est pas aberrant. Cependant, ce

[211] Mémoire 25, p. 198.

[212] *HAB* année 1747, p. 246.

lien prend aujourd'hui une toute autre forme car il faut distinguer deux niveaux dans la démarche actuelle : le choix d'un modèle dont la mise en équation garantit a priori l'existence et l'unicité d'une solution, et la preuve de cette unicité à l'aide de théorèmes mathématiques. Le déterminisme physique intervient donc en amont de la phase de résolution. Il n'est pas directement responsable de l'unicité comme chez D'Alembert. En somme, les considérations physiques ne font plus ingérence dans les lois de l'Analyse de nos jours.

Concernant l'existence et l'unicité, les concepts dalembertiens ne sont bien sûr pas équivalents aux nôtres, même si on peut les considérer comme des versions embryonnaires. Il faut ajouter que, bien que les mathématiciens disposent de théorèmes d'existence et d'unicité dès le début du XIX^{e} siècle, leur démarche générale s'articulera encore très souvent en trois phases[213], à l'instar du schéma de la FIG. 5 décrivant la façon de faire de D'Alembert. Chacune de ses étapes pourra en revanche faire appel à des outils différents émanant de l'algèbre ou de la géométrie. Ce n'est que plus tard que les théorèmes prendront tout leur intérêt avec l'apparition de méthodes de résolution approchées rendant indispensable la connaissance a priori de l'existence et l'unicité de la solution.

En effet, de nos jours, les mathématiciens démontrent d'abord que le problème considéré est « bien posé »[214], grâce à des théorèmes adaptés à la structure de l'EDP, au nombre de variables et à la nature des conditions initiales et conditions aux limites. Ils abordent ensuite la résolution du problème avec les outils adéquats.

Pour ce qui est des préoccupations présentes chez D'Alembert concernant la régularité des équations complémentaires, il faudra attendre Riemann[215] et, plus tard, des théories comme celles des distributions, pour que la difficulté soit prise en compte et trouve des réponses. Néanmoins, cette question est intimement liée à celle concernant la notion même de fonction. Elle entraînera d'ailleurs un débat sur le sujet entre les principaux géomètres contemporains de D'Alembert. Cette polémique, sur laquelle nous proposons à présent de nous pencher, constitue ainsi une répercussion de l'approche au-delà de la seule question des EDP.

---

[213] Particulièrement pour des problèmes se résolvant explicitement comme celui des cordes vibrantes.

[214] Selon Evans, un problème « bien posé » vérifie trois conditions : existence d'une solution, unicité d'une solution, dépendance continue des données du problème.

[215] Le mémoire intitulé « Sur la propagation d'ondes atmosphériques planes ayant une amplitude de vibration finie » auquel nous faisons allusion est initialement publié en allemand dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Göttingen*, t. VIII, 1860. Il a été traduit en français et publié dans les *Oeuvres de Riemann*.

Chapitre 2B : Les premières études des EDP en tant qu'objet mathématique

On insiste souvent beaucoup, comme nous venons de le faire, sur l'introduction des EDP dans un cadre physico-mathématique qui constitue un aspect majeur de la contribution de D'Alembert. Mais on omet régulièrement un autre apport de l'encyclopédiste dans le domaine du calcul aux différences partielles. D'Alembert a en effet été un des premiers à entreprendre une étude théorique générale des EDP en tant qu'objet mathématique hors de tout contexte physique. Il s'attèle à cette tâche dans le Mémoire 26 de ses *Opuscules* (t. IV, 1768)[216], qui, de par sa nature, est assez isolé au sein de son oeuvre.

C. Houzel a déjà évoqué ce mémoire en en décrivant les principaux axes[217], mais il paraît utile de le contextualiser, afin de comprendre dans quelle mesure il marque une étape du point de vue de l'histoire du calcul aux différences partielles. Pour ce faire, nous commencerons donc par en décrire le contenu, puis nous regarderons en amont pour en étudier la genèse et en aval pour en déterminer l'impact.

1. Le Mémoire 26 des Opuscules

La structure générale du Mémoire 26 se présente ainsi :

- Mémoire 26 : Recherches de Calcul Intégral, p. 225-253.
- Supplément :
  - §. I. Démonstration d'un théorême de calcul intégral, p. 254-258.
  - §. II. De l'intégration de certaines différentielles proposées, par le moyen de conditions données de ces différentielles, p. 259-270.
  - §. III. De l'intégration de quelques équations différentielles, p. 270-275.
  - §. IV. De l'intégration de quelques quantités différentielles à une seule variable, par la rectification des Sections coniques, p. 275-282.

Selon D'Alembert[218], la rédaction du corps du mémoire a été achevée en 1762, et le Supplément a été composé après l'été 1763.

Nous allons surtout nous concentrer sur la partie du Mémoire 26 qui précède le Supplément, car elle seule concerne à proprement dit le sujet qui nous intéresse : l'étude des EDP sous un angle exclusivement mathématique. Nous aborderons occasionnellement le Supplément lorsqu'il en constitue un prolongement.

---

[216] Ce texte a été en partie annoté par Grégory Faye pour son Stage de Licence ENS Lyon (*Sur les Formes Différentielles, Annotation du Mémoire 26*, Université Lyon 1, juillet 2006).

[217] « Les équations aux dérivées partielles : 1740-1780 », *Analyse et dynamique, étude sur l'œuvre de d'Alembert*, Presses de l'université de Laval, 2003, p. 237-258.

[218] Mémoire 26, p. 254.

Le contenu du Mémoire 26

Le Mémoire 26 débute par une allusion à un des traités de jeunesse de D'Alembert. Les *Réflexions sur la cause des vents*[219] sont en outre le premier texte dans lequel le savant tente de résoudre un problème mathématique équivalent à une équation aux dérivées partielles. Comme nous l'avons signalé dans le chapitre précédent, on ne peut effectivement pas dire qu'il manipule alors des EDP, car il pose en fait un système de formes différentielles qu'il cherche à rendre exactes (ou complètes, pour reprendre ses termes). Pour être plus clair, dans l'art. 87, il s'intéresse aux systèmes de différentielles, dont les inconnues sont α et β :

$$\begin{cases} \alpha\, ds + \beta\, du \\ \rho\alpha\, du + \nu\beta\, ds + \Delta(u,s)\, du + \Gamma(u,s)\, ds \end{cases}$$

Si on se conforme aux règles de rigueur de l'époque, et si on exige que ces différentielles soient exactes, on obtient l'EDP[220] :

$$\nu\frac{d^2z}{du^2} - \rho\frac{d^2z}{ds^2} = \Phi(u,s),$$

où $\Phi(u,s) = \dfrac{d\Delta(u,s)}{ds} - \dfrac{d\Gamma(u,s)}{du}$. Plus loin (art. 89), il pose un système équivalent à l'EDP :

$$\nu\frac{d^2z}{du^2} + (m-p)\frac{d^2z}{duds} - \rho\frac{d^2z}{ds^2} + \Phi(u,s) = 0.$$

Le problème qui va occuper D'Alembert dans les articles 2 à 7 du Mémoire 26 est une généralisation à trois inconnues des précédents. Il va chercher à déterminer trois fonctions A, B et ω, de telle sorte que les trois différentielles du système :

$$\begin{cases} A\, dx + B\, dt \\ \rho B\, dx + \omega\, dt + \mu A\, dx \\ \nu B\, dx + \pi A\, dt + \sigma A\, dx + \varpi B\, dt + \lambda\omega\, dx + \xi\omega\, dt \end{cases}$$

soient exactes (ρ, μ, ν, π, σ, ϖ, λ et ξ étant des constantes fixées). En effectuant des combinaisons linéaires des 3 formes différentielles, il parvient à la conclusion que A, B et ω sont des combinaisons linéaires de fonctions arbitraires de $x + q_1 t$, $x + q_2 t$ et $x + q_3 t$, où les q_i sont issues de la résolution d'un polynôme.

Il remarque également au passage qu'un système de trois formes différentielles complètes comme le sien est équivalent à une EDP d'ordre 3 (art. 7), au même titre qu'un système de deux différentielles correspond à une EDP d'ordre 2. Bien qu'il ne l'explicite pas, l'EDP sous-jacente au système ci-dessus est par exemple :

$$-\pi\frac{d^3y}{dx^3} + (\sigma - \varpi - \xi\mu)\frac{d^3y}{dx^2dt} + (\nu - \xi\rho + \lambda\mu)\frac{d^3y}{dxdt^2} + \lambda\rho\frac{d^3y}{dt^3} = 0.$$

---

[219] *Réflexions sur la cause générale des Vents*, Paris, 1747.

[220] Voir « D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles », Serge Demidov, *Jean d'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix*, Editions des archives contemporaines, Paris, 1989, p. 333-350 ; et *L'équation des ondes*, Lionel Poujet, Mémoire de Master 1, Université Lyon 1, mai 2006.

221

A l'article 8, D'Alembert fait le lien entre l'intégration d'une EDP d'ordre 1 $\dfrac{dq}{dx}+\xi\dfrac{dq}{dz}=0$, la recherche d'un facteur intégrant pour la forme différentielle $dz-\xi dx$[222], et l'intégrabilité de l'équation différentielle $dz-\xi dx=0$ (thème qu'il approfondira dans le §. I du Supplément).

Dans les articles 9 à 16, il revient, un peu comme dans ses *Réflexions sur la cause des vents*, à des systèmes de deux formes différentielles à rendre complètes, dont les inconnues sont deux fonctions inconnues A et B.

A partir de l'article 17, il pose les problèmes en termes d'EDP qu'il cherche à intégrer, ce qui ne l'empêche pas de continuer à utiliser des formes différentielles pour intégrer celles-ci. Jusqu'à l'article 24, il s'intéresse aux EDP linéaires du premier ordre :

$$\frac{dq}{dx}+\frac{\xi dq}{dz}=0,\ \frac{dq}{dx}+\frac{\xi dq}{dz}+\omega=0\ \&\ \frac{dq}{dx}+\frac{\xi dq}{dt}+\zeta q=0.$$

Il considère d'abord les coefficients constants, avant d'être plus général. Il montre comment on peut passer de l'une à l'autre par changement de variable. Il esquisse enfin un début de résolution par séparation des variables (art. 23, 24).

Dans l'article 25, il poursuit avec ce dernier type de méthode, mais appliqué cette fois-ci l'équation linéaire du second ordre : $\dfrac{ddq}{dx^2}+\xi dqdx+\zeta\dfrac{dq}{dt}+\lambda q+k\dfrac{ddq}{dt^2}=0$. Cette EDP, et certains de ses cas particuliers, l'occupent jusqu'à l'article 46. A partir de l'article 31, il s'intéresse à $\xi q+\zeta\dfrac{dq}{dx}+\dfrac{ddq}{dx^2}+b\dfrac{ddq}{dt^2}=0$ (ξ et ζ étant des fonctions de x, et b une constante quelconque), et utilise une méthode inspirée de travaux de Lagrange, qui consiste à chercher des solutions sous la forme

$$q=Xu+X'\frac{du}{dx}+X''\frac{d^2u}{dx^2}...$$

(u étant une fonction de x et t, et X, X'... de x). Il parvient ainsi à se ramener dans certains cas à l'équation $\dfrac{ddz'}{dx^2}+b\dfrac{ddz'}{dt^2}=0$.

Le mémoire s'achève par de nouvelles considérations sur les formes différentielles, et sur l'esquisse d'une méthode consistant à chercher des solutions d'EDP d'ordre 2 sous la forme $q=X\theta u$ (art. 51, 52)[223].

Comme le signale D'Alembert dès les premières lignes, la rédaction du Supplément du Mémoire 26 est postérieur à l'été 1763 et à sa rencontre avec Euler à Berlin. Seuls les deux premières sections (§) ont un lien avec le calcul aux différences partielles. Dans le §.I, il s'intéresse à l'existence d'un facteur intégrant M pour des formes différentielles $dx+\alpha dy$[224]. Il construit M de manière plutôt

[221] La plupart des EDP envisagées par D'Alembert dans le Mémoire 26 figurent dans l'inventaire à la fin du chapitre 2A.

[222] Si un tel facteur β existe, on a alors $dq=\beta dz-\beta\xi dx$, et l'EDP est alors vérifiée.

[223] X est fonction de x, θ de t, et u de x et de t.

[224] C'est-à-dire tel que $M(dx+\alpha dy)$ soit exacte.

géométrique, dans l'hypothèse où l'équation différentielle $dx + \alpha dy = 0$ est intégrable. D'un point de vue moderne, son approche revient à envisager des lignes de niveaux. Dans le §. II, il se livre à des considérations autour de l'intégration de formes différentielles exactes. Les deux dernières sections sont consacrées pour l'une à l'intégration d'équations différentielles ordinaires (§.III), et pour l'autre à des commentaires concernant les intégrales elliptiques (§.IV)[225].

Premières remarques

Avant d'approfondir, nous pouvons émettre quelques premières observations générales concernant le style et la démarche du savant dans le Mémoire 26. Tout d'abord, à aucun moment, D'Alembert ne formule de conclusion décisive. Son attitude ne consiste pas à annoncer un résultat, puis à en fournir une démonstration structurée. Sa rédaction peut ainsi sembler désordonnée. En fait, il procède surtout à des études de cas mais, le plus souvent, il n'explicite pas les solutions des EDP ou des systèmes de formes différentielles qu'il considère (sauf pour le premier système de trois formes différentielles). Toutefois, on peut dégager un double objectif dans sa démarche :

- Expliquer comment un cas peut se ramener à un autre que l'on sait intégrer. En somme, il élargit pas à pas de façon à pouvoir intégrer des EDP plus générales et plus compliquées.
- Donner des méthodes, et esquisser des stratégies permettant d'obtenir des solutions (séparation de variables, recherche de solutions sous des formes particulières).

Ces remarques sont à nuancer pour ce qui est du Supplément, car le §. I est relativement structuré et véritablement consacré à un problème précis (la détermination du facteur intégrant d'une forme différentielle), alors que, dans le §. II, il livre plutôt un catalogue de remarques décousues.

D'un point de vue plus mathématique, on peut ajouter deux remarques. Dans la systématisation de l'étude des EDP qu'il entreprend, D'Alembert n'adjoint pas à ces équations des conditions aux limites ou des conditions initiales. Au regard de ce que nous avons dit dans le chapitre 2A de la partie II, c'est assez compréhensible car ces dernières sont liées au cadre physique du problème étudié, qui est ici absent. Par ailleurs, il faut noter que la direction suivie par D'Alembert dans sa tentative de généralisation ne l'amène pas encore à envisager un nombre de variables plus grand, ou des équations non linéaires...

2. Pourquoi étudier les EDP d'un point de vue exclusivement mathématique ?

Si l'on tente de cerner les raisons qui poussent D'Alembert à entreprendre une étude systématique des EDP dans le Mémoire 26, trois hypothèses ne s'excluant pas

[225] Ces deux sections font donc suite aux mémoires parus dans les recueils de l'Académie de Berlin (*HAB*) des années 1746, 1748 et 1750.

mutuellement se présentent naturellement à nous : l'influence d'un autre savant, la complexité croissante des EDP rencontrées dans divers problèmes et/ou la visée de l'emploi de ces EDP dans un problème physico-mathématique non explicité.

Dés les premières lignes du mémoire, on remarque une allusion à un écrit de Lagrange paru dans le tome II des *Mélanges de Turin* paru en 1762. A première vue, D'Alembert ne cite le savant turinois que pour la méthode qu'il utilise ponctuellement dans l'art. 31 du Mémoire 26 et qui consiste à rechercher les solutions d'une équation différentielle sous la forme :

$$z = Au + B\frac{du}{dx} + C\frac{d^2u}{dx^2}...$$

Lagrange fait appel à cette stratégie au chapitre IV de ses « Nouvelles Recherches sur la nature et la Propagation du son »[226], lorsqu'il tente d'intégrer l'EDP :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2} + mc\frac{d\left(\frac{z}{x}\right)}{dx}.$$

Afin d'être précis sur le contexte dans lequel D'Alembert conçoit le Mémoire 26, il nous faut expliquer l'origine de cette EDP. Dans *HAB* année 1759, Euler consacre trois mémoires à la propagation du son[227]. Il étudie d'abord la vibration de particules dans une colonne d'air et aboutit à l'équation des cordes vibrantes $\frac{d^2y}{dt^2} = 2gh\frac{d^2y}{dx^2}$ qu'il résout[228]. Il explique ensuite que si on ne suppose plus les vibrations infiniment petites (p. 208), le phénomène de propagation est régi par l'équation $\left(1 + (\frac{dy}{dx})^2\right)\frac{d^2y}{dt^2} = 2gh\frac{d^2y}{dx^2}$[229], mais n'entreprend pas de résolution. Enfin, supposant à nouveau les vibrations petites, il étudie sur une cinquantaine de pages la propagation des ondes en dimension deux et trois. Dans ce dernier cas, il montre que les vibrations sont gouvernées par l'EDP[230] :

$$\frac{1}{2gh}\frac{ddu}{dt^2} = -\frac{2u}{V^2} + \frac{2}{V}\frac{du}{dV} + \frac{ddu}{dV^2}.$$

Elle correspond à un cas particulier de celle envisagée par Lagrange dans le chapitre IV de ses « Nouvelles Recherches sur la nature et la Propagation du son »,

[226] *Mélanges de Turin*, t. II, p. 11-172 ; *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 151-316. Pour citer ce mémoire, nous adopterons la pagination de cette dernière édition.

[227] « De la propagation du son », « Supplement aux recherches sur la propagation du son » et « Continuation des recherches sur la propagation du son », *HAB* année 1759 (1766), p. 185-264 (E305, E306, E307).

[228] y désigne l'excursion horizontale à l'instant t de la particule située à l'abscisse x.

[229] Car $\frac{dy}{dx}$ n'est plus négligeable.

[230] V correspond à la distance entre l'origine et le point où l'on cherche à déterminer l'amplitude des oscillations, et u est une fonction de V et de t liée à l'amplitude de celles-ci.

que nous évoquions précédemment. Dans leur correspondance, Euler et Lagrange évoquent à plusieurs reprises cette équation entre 1759 et 1762[231]. Euler revient d'ailleurs sur le problème, dit de la propagation des ondes sphériques, dans une « Lettre de M. Euler à M. de la Grange » publiée dans le tome II des *Mélanges de Turin*[232]. Et dans le même recueil, cette question occupe une place importante dans les « Nouvelles Recherches sur la nature et la Propagation du son » de Lagrange.

Attardons-nous désormais un moment sur ce mémoire de Lagrange, car ce texte va bien au delà de la seule étude de la propagation du son. En réalité, le savant turinois se livre, du chapitre III au chapitre V, à un véritable récapitulatif des problèmes physico-mathématiques nécessitant un recours à des EDP :

– la propagation du son dans une colonne d'air, régi par l'équation $\dfrac{d^2y}{dt^2} = c^2\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (chap. III),
– la propagation des ondes sphériques (chap. III),
– les oscillations d'un fluide élastique renfermé dans un tuyau conoïdal (chap. IV),
– les cordes d'épaisseur inégale (chap. IV),
– les oscillations d'une chaîne pesante (chap. IV),
– la propagation du son dans le cas où les ébranlements des particules d'air ne sont pas infiniment petits (chap. V).

Les phénomènes envisagés au chapitre III sont gouvernées par l'EDP que nous avons déjà évoquée qui est en fait une version généralisée de celle des ondes sphériques :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\frac{d^2z}{dx^2} + mc\frac{d(\frac{z}{x})}{dx}.$$

La présence du coefficient m n'est toutefois pas sans poser des difficultés supplémentaires. La dernière situation étudiée au chapitre V pose quant à elle des problèmes d'une autre nature puisqu'elle fait apparaître des EDP avec second membre, ou non linéaires.

Ceci étant, l'objectif de Lagrange dans ce mémoire est plutôt de montrer l'efficacité de sa méthode d'intégration des EDP. Celle-ci consiste à multiplier l'équation par une fonction $M(x)$, à intégrer en x, puis à se ramener à des équations différentielles ordinaires après quelques intégrations par parties.

Néanmoins, son mémoire constitue un état des lieux intéressant, bien que partiel, des EDP rencontrées à l'époque. Il permet de mieux saisir leur complexification progressive et fait apparaître la nécessité d'une étude systématique et purement mathématique des EDP. Bien que D'Alembert ne le cite qu'évasivement, il constitue un élément important du contexte dans lequel il compose le Mémoire 26. L'EDP liée au problème des ondes sphériques est d'ailleurs englobée dans celles qu'il étudie.

---

[231] *Leonhard Euler Correspondance Briefwechsel*, *Opera Omnia*, série IV A, vol. 5, 1980. Voir les lettres d'Euler du 23 octobre 1759 et du 9 novembre 1762, ainsi que celles de Lagrange du 26 décembre 1759, du 1er mars 1760.

[232] p. 1-10.

On pourrait objecter que, du coup, c'est en fait Lagrange qui est à l'origine du mode d'étude des EDP dont nous parlons. Il joue certes un rôle, mais même s'il perçoit que différents phénomènes peuvent être gouvernées par une même EDP, il ne va pas aussi loin que D'Alembert. Son étude est moins ambitieuse et générale et se limite à quelques catégories restreintes d'EDP. De plus, il ne se détache pas complètement du cadre physique.

Si on reconnaît un rôle à Lagrange, il faut en faire de même pour Euler, car celui-ci entreprend également l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{b}{x}\frac{dz}{dx} + \frac{c}{x^2}z,$$

dans un mémoire exclusivement mathématique consacrée à ce sujet, rédigé vraisemblablement en 1765[233], et il emprunte en cela la même direction que D'Alembert et Lagrange, mais il se cantonne à une catégorie précise d'équation.

Les recherches commises par d'autres savants au début des années 1760 ont donc pu encourager D'Alembert à entreprendre une étude systématique des EDP, mais il faut ajouter à cela certaines de ses propres recherches.

En effet, l'encyclopédiste publie dans *HAB* année 1765 un mémoire intitulé « Sur les tautochrones »[234]. Ce problème consiste à déterminer la courbe telle que, quel que soit le point d'où l'on lâche un corps pesant qui la descend, celui-ci met le même temps pour atteindre le point le plus bas de la courbe. Cette question avait intéressé par le passé des savants comme Jean Bernoulli ou Fontaine et connaît au milieu des années 1760 un regain d'intérêt. Lagrange y consacre d'ailleurs un mémoire dans le même recueil[235]. Dans ses recherches, rédigées très probablement après l'essentiel du Mémoire 26, D'Alembert est amené à considérer l'équation[236]

$$p\mu + \frac{dp}{dx} + \frac{u\nu dp}{du} + \rho = 0,$$

qu'il évoque d'ailleurs dans le §.II du Supplément du Mémoire 26.

Par conséquent, si l'on revient aux hypothèses envisagées au début du 2., on doit reconnaître qu'il est délicat de trancher. Les travaux d'autres savants jouent un rôle dans la démarche de D'Alembert dans le Mémoire 26, au même titre que la complexité croissante des EDP.

3. Les évolutions collatérales de l'Analyse

L'étude des EDP dans un cadre général et purement mathématique est donc un fait marquant du début des années 1760. D'Alembert y joue un rôle déterminant,

[233] *Mélanges de Turin*, t. III, 1766, p. 60-91 (E319).

[234] *HAB* année 1765 (1767), p. 381-413.

[235] p. 364-380.

[236] x représente la distance à parcourir, u la vitesse et p la force accélératrice.

ainsi que Lagrange et Euler. Mais, ce mouvement entraîne ou accompagne d'autres évolutions que cela soit au sein de l'oeuvre de D'Alembert ou plus largement dans le domaine de l'Analyse.

Evolutions au sein de l'approche de D'Alembert

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, D'Alembert est parfois amené à manipuler des EDP assez semblables dans des situations différentes, comme, par exemple, dans le problème des cordes vibrantes et dans celui de l'équilibre des fluides. Jusqu'au tome IV des *Opuscules*, il ne semble pas percevoir cette similarité ou, du moins, il ne l'utilise pas vraiment. Cela change à partir du tome V des *Opuscules* (1768). Dans les Mémoires 32 et 33, alors qu'il étudie le mouvement des fluides dans un vase, il envisage des conditions aux limites inspirées de celles des cordes vibrantes (fixité des extrémités). Physiquement, c'est assez incongru, car habituellement dans ce genre de problème les conditions aux limites portent sur la paroi du vase. Mais cela lui permet de sortir d'une impasse, et de faire appel à la périodicité et à l'imparité des fonctions arbitraires associées aux cordes vibrantes.

Cette prise de conscience et de recul est une tendance importante de la fin de son oeuvre. Elle aura également des implications sur la structure de ses mémoires et entraîne une forme de hiérarchisation entre l'Analyse et ses applications en Physique. En effet, jusqu'à la fin des années 1760, dans les mémoires faisant appel à des EDP, les aspects physiques et mathématiques étaient entremêlés. Mais, dans les derniers tomes de ses *Opuscules*, il adopte une démarche consistant à isoler l'étude mathématique et à l'appliquer ensuite à des problèmes physiques particuliers. Par exemple, dans le mémoire 58 §VI, il livre des réflexions sur les fonctions changeant d'expression[237], qu'il décline ensuite à des problèmes physiques précis dans les Mémoires 59 §VI (son) et 59 §VII (cordes vibrantes) du tome IX.

Une nouvelle branche de l'Analyse

L'étude systématique et théorique des EDP pose une autre question : à partir de quand le calcul aux différences partielles est-il conçu comme une branche de l'Analyse nouvelle et relativement autonome, notamment vis-à-vis du calcul différentiel et intégral à une variable ? Cette question est délicate, mais on peut faire plusieurs remarques. Tout d'abord, le Mémoire 26 des *Opuscules*, tout comme celui de Lagrange dans le tome II des *Mélanges de Turin*, mêle des considérations sur les EDP à d'autres concernant les équations différentielles ordinaires et le calcul intégral classique. Certes, D'Alembert ne peut pas ignorer qu'il n'utilise pas exactement les mêmes outils dans chacun des cas, les formes différentielles complètes/exactes sont par exemple propres au calcul aux différences partielles. Néanmoins, avant le mémoire E319 d'Euler et au Mémoire 26 des *Opuscules*, on ne recense pas de travaux portant que sur l'étude mathématiques des EDP sans qu'il soit relié au calcul intégral classique. De surcroît, les outils et les notions qui y sont associés spécifiquement ne bénéficient ni d'une entrée, ni d'une grande attention dans l'*Encyclopédie.*

---

[237] « Sur les Fonctions discontinues », *Opuscules*, t. VIII, 1780, p. 302-308.

En réalité, il faut attendre le début des années 1770, pour que le calcul aux différences partielles acquière un véritable statut. Tout d'abord, c'est à ce moment que le terme de différences partielles fait son apparition. On le découvre notamment dans le titre de deux mémoires de Condorcet[238]. L'influence de D'Alembert sur ces textes est d'ailleurs assez flagrante. Condorcet prend date et les annonce fin 1770, dès qu'il revient du voyage dans le sud de la France qu'il avait effectué en compagnie de l'encyclopédiste. De plus, l'approche du marquis est similaire à celle de D'Alembert, comme nous le verrons au 4.

Il faut ajouter que c'est à cette époque que paraît le troisième tome des *Institutiones calculi integralis* d'Euler[239], dans lequel le savant étudie longuement le calcul différentiel à 2 ou 3 variables. Comme C. Houzel aborde déjà le contenu de ce texte, nous ne nous étendrons pas sur le sujet.

On peut donc dire que le calcul aux différences partielles est conçu par les principaux analystes comme une branche autonome de l'Analyse à partir du début des années 1770. C'est à cette époque que la désignation ainsi que des mémoires consacrés vraiment à ce ce sujet apparaissent. Le second tome du Supplément Panckoucke, publié en 1777, comporte d'ailleurs un article « Partielles, équations aux différences partielles » écrit par Condorcet. A cette occasion, ce dernier ne manque d'ailleurs pas de rendre hommage à son aîné :

> « M. D'Alembert est l'inventeur de cette branche de l'analyse, sans laquelle on ne pouvoit résoudre d'une manière rigoureuse & générale, les problèmes où il s'agit de corps fluides ou flexibles. Cette découverte, aussi importante & peut-être plus difficile que celle du calcul intégral, n'a été moins éclatante que parce que son auteur a exprimé une chose nouvelle par des mots & des signes déjà connus. »

4. Répercussions et postérité du Mémoire 26

Dans la continuité du Mémoire 26 et des autres travaux de même nature que nous avons évoqués, débute donc un mouvement d'étude des EDP en tant qu'objet mathématique, hors de tout contexte physique. Nous allons désormais tenter d'en cerner l'ampleur, ce qui nous donnera également une idée de la postérité du Mémoire 26. Nous nous attarderons surtout sur les années 1770, mais nous proposons à la fin de ce chapitre un inventaire des mémoires traitant ce sujet sur une période un peu plus large.

Dans les mémoires que nous avons évoqués, Condorcet va se montrer encore plus ambitieux que D'Alembert dans le Mémoire 26, en cherchant à intégrer des EDP encore plus générales. Dans son mémoire des *MARS* année 1770, il amorce

---

[238] « Mémoire sur les équations aux différences partielles », *MARS* année 1770 (1773), p. 151-178 ; « Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des Equations aux différences partielles », *MARS* année 1771 (1774), p. 49-74.

[239] *Institutiones calculi integralis*, vol. 3, St Pétersbourg, E385.

l'étude de l'EDP linéaire d'ordre n, d'inconnue Z, qu'il écrit[240] :

$$d^nZ + A_1\partial d^{n-1}Z + A_2\partial^2 d^{n-2}Z + ... + A_n\partial^n Z$$

$$+Bd^{n-1}Z + B_1\partial d^{n-2}Z + ... + B_{n-1}\partial^{n-1}Z + ... + PZ = 0$$

Il tente de l'intégrer en en réduisant progressivement l'ordre, sous certaines hypothèses. Comme son approche reste très abstraite et qu'il n'obtient pas de résultats décisifs, il envisage l'EDP linéaire particulière d'ordre n et applique sa méthode :

$$\frac{d^nz}{dx^n} + \frac{ad^nz}{dx^{n-1}dy} + \frac{bd^nz}{dx^{n-2}dy^2} + \frac{d^nz}{dx^n} + Q = 0$$

Il se ramène à une succession d'EDP d'ordre 1 à intégrer[241]. La même résolution de ce problème avait d'ailleurs été proposé par Monge dans un mémoire intitulé « Sur l'intégration des équations aux différences partielles », présenté le 27 novembre 1771 à l'Académie Royale des Sciences[242].

Les questions du dénombrement et de la nature des fonctions arbitraires intervenant dans l'intégration d'une équation d'ordre n occupent également une place importante dans les travaux de Condorcet sur les EDP des *MARS* année 1770 et 1771.

L'influence de D'Alembert sur Condorcet est claire, mais ce dernier a également été inspiré par des mémoires de Lagrange et par les *Institutiones* d'Euler, qu'il cite. Et comme l'a montré Christian Gilain[243], par son inclinaison pour une approche générale et programmatique en Analyse pure, Condorcet est assez proche de Fontaine.

Revenons maintenant un moment à Monge. Ses travaux concernant les EDP débutent avec la recherche de fonctions minimisant des expressions intégrales. Il réduit ce problème à un système d'EDP[244]. Dans son mémoire soumis à l'Académie le 27 novembre 1781, il s'intéresse certes à l'intégration des EDP linéaires d'ordre n, mais étudie surtout l'injection de conditions aux limites dans une expression issue de l'intégration d'une EDP et faisant intervenir des fonctions arbitraires. En fait, son approche est géométrique, et il cherche à déterminer au sein d'une famille de surfaces celle qui contient une courbe donnée de l'espace. Seule cette seconde partie de son mémoire donnera lieu à une publication dans le tome VII des *Sav. Etr.*.

[240] Les coefficients des EDP sont constants.

[241] Il emploie le terme d'équations de condition.

[242] Ce mémoire ne sera pas publié en tant que tel, mais Condorcet mentionne les travaux de Monge dans les *MARS* année 1770 (p. 173).

[243] « Condorcet et le calcul intégral », *Les sciences à l'époque de la Révolution Française - Recherches historiques*, éd. R. Rashed, Paris, Blanchard, 1988, p. 85-147.

[244] Lettre à D'Alembert du 3 janvier 1771. R. Taton : « Une correspondance mathématique inédite de Monge », *Revue Scientifique*, 85, p. 963-989.

Dans *HAB* année 1772 (1774), Lagrange livre quant à lui un mémoire intiulé « Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre ». Il étudie les EDP d'ordre 1, linéaires ou non, dont l'inconnue est une fonction u à deux ou trois variables. L'originalité de ses travaux tient au fait qu'il recherche ses solutions u données implicitement, c'est-à-dire de la forme $N(u, x, y) = 0$ ou $N(u, x, y, z) = 0$.

Dans ses « Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles » publiées dans *MARS* année 1773 (1777), Laplace aborde la question un peu à la manière de D'Alembert dans le Mémoire 26, qu'il cite d'ailleurs comme référence. Il se concentre essentiellement sur les EDP linéaires du 1^{er} et 2^{nd} ordre, à coefficient non constants, dont l'inconnue est une fonction à deux variables. Il insiste beaucoup sur les techniques de changement de variable permettant de ramener une EDP à une autre plus simple.

Lacroix mentionne également le Mémoire 26 de D'Alembert comme une de ses sources dans le tome II de son *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* pour le chapitre intitulé « De l 'intégration des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au premier »,

On peut donc conclure que le Mémoire 26 a été lu et étudié par d'éminents savants de la génération postérieure à celle de D'Alembert, ce qui fait de ce texte un des plus importants du tome IV des *Opuscules*

Ceci étant, comme nous l'avons déjà signalé, D'Alembert n'est pas le seul inspirateur de ce mouvement d'étude des EDP en tant qu'objet mathématique. Euler et Lagrange jouent aussi un rôle déterminant. Cette dynamique se poursuivra dans les années 1780 avec des savants comme Cousin, Charles, Monge, comme le montre l'inventaire non exhaustif qui suit.

Inventaire des mémoires abordant les EDP sous un angle purement mathématique (1766-1785

Date	Auteur	Titre et référence	Remarques
1766	Euler	« Recherches sur l'integration de l'equation $ddzdt^2 = aa\frac{ddz}{dx^2} + \frac{b}{x}\frac{dz}{dx} + \frac{c}{xx}z$ », *Mélanges de Turin*, t. III, p. 60-91.	Etude d'une version généralisée de l'EDP gouvernant la propagation des ondes sphériques.
1768	D'Alembert	« Vingt-sixième Mémoire, Recherches sur le Calcul intégral », *Opuscules*, t. IV, p. 225-282	Etude exclusivement mathématiques d'EDP ou de systèmes de formes différentielles.
1771	Euler	*Institutiones calculi integralis*, vol. 3, St Pétersbourg, E385.	

Date	Auteur	Titre et référence	Remarques
1773	Condorcet	« Mémoire sur les équations aux différences partielles », *MARS* année 1770, p. 151-178	Influence de D'Alembert. Lien avec certaines recherches de Monge.
1774	Condorcet	« Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des Equations aux différences partielles », *MARS* année 1771, p. 49-74	Entr'autres évocation du problème du changement d'expression des fonctions arbitraires.
1774	Lagrange	« Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre », *HAB* année 1772, p. 353-372.	EDP non linéaires, recherche de solutions données implicitement.
1776	Monge	« Mémoire sur la construction des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *Sav. Etr.* pour 1773, t. VII, p. 267-300 ; suite de ce mémoire p. 305-327.	Etude géométrique de l'injection des conditions aux limites dans l'expression issue de l'intégration d'une EDP. Des mémoires semblables ont publiés dans le t. V des *Mélanges de Turin.*
1777	Laplace	« Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles », *MARS* année 1773, p. 341-402	Mentionne le Mémoire 26 de D'Alembert.
1781	Lagrange	« Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des intégrales particulières », *NMAB* année 1779, p. 121-160.	
1786	Cousin	« Remarques sur la manière d'intégrer par approximations les Équations différentielles, et les Équations aux différences partielles », *MARS* année 1783, p. 649-683.	D'importants commentaires de Cousin sur le sujet se trouvent dans son *Introduction à l'étude de l'astronomie physique* de 1787.
1787	Monge	« Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes », *MARS* année 1784, p. 85-192	Etude de surfaces engendrées à partir de courbes génératrices particulières, EDP non linéaires...

Date	Auteur	Titre et référence	Remarques
1787	Charles	« Recherches sur le Calcul intégral », *MARS* année 1784, p. 348-352.	
1787	Cousin	« Mémoire sur l'intégration des Équations aux différences partielles », *MARS* année 1784, p. 407-431.	
1787	Lagrange	« Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires », *Nouv. Mém. Berlin* année 1785, p. 174-190	
1806 (réd. 1777)	Euler	« Recherches sur quelques integrations remarquables dans l'analyse des fonctions a deux variables connues sous le nom de differences partielles », *Nov. Acta Acad. Petrop.*, t. 15, p. 3-28	
1830 (réd. 1777)	Euler	« Integration d'une espece remarquable d'équation différentielle dans l'analyse des fonctions a deux variables », *Mémoires de l'académie des sciences de St. Petersbourg*, t. 11, p. 131-137 (E785).	

Chapitre 3 : Les dessous de l'évolution de D'Alembert sur la notion de fonction

Nous revenons ici sur un sujet que nous avons évoqué brièvement au chapitre 5 de la Partie I : l'évolution tardive des positions de D'Alembert sur la notion de fonction. Nos explications concernant la démarche de résolution des EDP dans l'oeuvre de D'Alembert (chapitre 2A, Partie II) vont nous permettre de révéler les coulisses de ce revirement et d'aborder sous un nouvel angle le débat sur la nature des fonctions arbitraires dans la période qui débute à la fin des années 1760.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2A, un des aspects importants de la démarche de D'Alembert dans la résolution des EDP, la *possibilité de résoudre*, dépend de la nature et de la régularité des fonctions intervenant dans les données du problème, c'est-à-dire dans les équations complémentaires. L'enjeu du débat concernant le rejet ou l'acceptation des fonctions changeant d'expression apparaît ainsi clairement. Ses conclusions conditionnent la possibilité de résoudre les problèmes faisant appel à des EDP, comme notamment ceux des cordes vibrantes et de l'écoulement des fluides.

Certains des aspects et des protagonistes de ce débat, tels qu'Euler et Lagrange, ont déjà été abordés par A. Youschkevitch[245] et J. Dhombres[246]. Comme nous nous intéressons aux recherches plus tardives de D'Alembert, nous nous concentrerons sur la période allant de la fin des années 1760 à la mort du géomètre en 1783, et nous analyserons chronologiquement les réflexions de D'Alembert dans ce domaine et leurs répercussions.

1. Origines de la position de D'Alembert et premiers doutes

La défense de la permanence de la forme

Les premières interrogations de D'Alembert sur la nature des fonctions arbitraires apparaissent au sein de ses recherches sur le problème des cordes vibrantes. Nous avons déjà fait observer que sa position, dans ce contexte, consiste à affirmer que, pour pouvoir intervenir dans la solution du problème, une fonction donnée ne doit pas faire de « sauts de courbure ». Cela implique, selon lui, qu'elle ne doit pas changer d'expression sur ce qu'on appellerait aujourd'hui son ensemble de définition. Au passage, il nous faut dès maintenant apporter des précisions indispensables pour la suite quant à l'emploi des termes *continu* et *discontinu* par D'Alembert et

[245] « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle », *Fragment d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P n° 41, 1981, p. 7-68.

[246] « Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction », *Archive for History of Exact sciences*, vol. 36, n° 2, 1986, p. 91-181.

ses contemporains, ceux-ci n'ayant pas le même sens qu'aujourd'hui. Comme l'explique très justement A. Youschkevitch :

> « continuité signifie invariabilité, immuabilité de la loi de l'équation déterminant la fonction sur tout le domaine des valeurs de la variable, alors que la discontinuité d'une fonction signifie un changement de la loi analytique, l'existence de lois différentes sur deux intervalles ou plus de son domaine. » [247]

En somme, la *continuité* des savants du XVIII^{e} correspond à ce que nous avons appelé *permanence de la forme*. Deux motifs poussent donc D'Alembert à exiger la *continuité* des fonctions :

1°. Le savant observe tout d'abord, exemples à l'appui, qu'un changement d'expression d'une fonction génère souvent une difficulté dans la détermination de ses dérivées première et seconde[248]. Constatant les difficultés liées aux changements d'expression, D'Alembert tire ainsi la conclusion suivante : *toute* fonction changeant d'expression doit être rejetée. On interpréterait aujourd'hui cette affirmation comme une généralisation hâtive d'observations faites sur une série de cas particuliers. Soulignons toutefois qu'il est l'un des seuls à s'intéresser à ce type de problème local, avec, par ailleurs, des intuitions assez pertinentes.

2°. L'autre motif relève de ce que D'Alembert estime être les fondements de l'Analyse, comme en témoigne cet extrait du 1er Mémoire des *Opuscules* :

> « J'ajoute qu'il est contre toutes les règles de l'analyse, de faire ainsi changer de forme, suivant le besoin qu'on croit en avoir, à l'intégrale d'une équation différentielle. »[249]

La crainte sous-jacente est que l'infraction à ces règles conduise à multiplier le nombre de solutions, là où le bon sens impose qu'il n'y en ait qu'une, ainsi que nous l'avons vu au chapitre 2A (3.2.), D'Alembert considère également que certaines de ces nouvelles solutions seraient des lois parfaitement arbitraires, les changements d'expression n'étant pas contrôlables.

Cependant, contrairement au préjugé répandu par certains de ses pairs[250], et malgré le nombre de pages écrites pour en défendre le bien fondé, cette position du géomètre n'est pas figée dans le temps. Examinons donc ce qui nous semble correspondre, à partir de 1768, à la première étape d'une évolution de son point de vue sur la question.

---

[247] *id* p. 42.

[248] Précisons toutefois qu'en termes modernes, les situations envisagées par le géomètre correspondent à des problèmes d'existence de la dérivée, plutôt qu'à des problèmes de discontinuité.

[249] Mémoire 1, p. 32.

[250] Dans son *Introduction à l'étude de l'astronomie physique* (1787), Jacques-Antoine-Joseph Cousin écrit en effet :

> « C'est encore M. Euler qui a dit le premier que rien ne devoit limiter la généralité des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales completes des équations aux différences partielles ; qu'on y devoit comprendre les fonctions irrégulieres et discontinues. M. d'Alembert a combattu cette idée tant qu'il a vécu ; il n'a jamais voulu reconnoître toute l'étendue des solutions qu'il avoit données lui-même dans ses *Réflexions sur la cause des vents*, dans son *Mémoire sur les Cordes vibrantes*, et dans l'*Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides.* »

La question de la propagation du son

En 1747, D'Alembert notait que l'équation des cordes vibrantes, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, pouvait également représenter les vibrations longitudinales d'une colonne d'air, et donc correspondre à l'équation de la propagation du son :

> « Si on supposoit que la corde fit des vibrations longitudinales de C vers A, au lieu de les faire perpendiculairement à sa longueur, alors imaginant que y fut l'espace décrit par un point quelconque, on auroit la même équation que ci-dessus (...) entre y & s. Par là on pourroit calculer la vitesse du son d'une maniére beaucoup plus génerale, qu'on ne l'a fait jusqu'ici. » [251]

Après que Lagrange s'est intéressé au problème, D'Alembert va mettre en pratique cette remarque dans le Mémoire 34 §II, de ses *Opuscules* (t. IV), intitulé « Sur la vitesse du son ». Désignant par $y(x, t)$ l'excursion longitudinale de la particule d'abscisse x à l'instant t, il reprend l'expression issue de « l'intégration » de l'équation $\dfrac{d^2y}{dt^2} = k^2\dfrac{d^2y}{dx^2}$ [252] :

$$y = \Phi(x + kt) + \Psi(x - kt),$$

et dispose, dans ce nouveau cadre d'étude, de l'équation complémentaire :

$$y(x, 0) = 0.$$

La confrontation de ces deux relations le conduit dès lors aux équations :

$$y = \Phi(x + kt) - \Phi(x - kt)$$

et

$$\frac{dy}{dt} = k\Delta(x + kt) + k\Delta(x - kt),$$

dans laquelle Δ désigne la dérivée de la fonction Φ. La vitesse initiale de chaque particule d'abscisse x se trouve ainsi décrite par la fonction $2k\Delta(x)$, ce qui n'est pas sans lui poser de difficultés. Ce résultat doit effectivement s'accorder avec son appréhension physique du phénomène de propagation sonore, considéré comme une transmission d'oscillations entre particules d'air successives. Puisqu'une impulsion doit être donnée à une petite portion de la colonne d'air afin d'initier les vibrations, la fonction Δ présentera nécessairement le profil de la Fig. 6[253] (nous parlerions aujourd'hui d'une fonction à support compact).

Il s'en justifie ainsi :

> « Cela posé, soit A le point de l'air qui a été mis en mouvement par le corps sonore, & supposons que l'agitation s'étende dans le premier instant jusqu'en B & C ; la courbe

[251] *HAB* année 1747, p. 248.

[252] Pour des raisons de lisibilité, nous prenons la liberté de poser $k = \dfrac{2a\lambda}{\theta}$, λ et a désignant respectivement la hauteur de la ligne d'air et l'espace parcouru dans le temps θ.

[253] Il s'agit d'une reproduction de la Fig. 27 de l'imprimé d'origine du tome V des *Opuscules*.

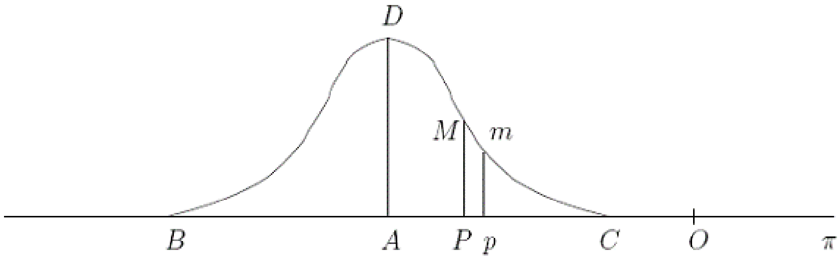

FIG. 6 – Profil de la fonction Δ à l'instant $t = 0$

> BDC, des vîtesses initiales, sera telle que faisant $AP = x$, $Pm = \frac{dy}{dt}$, on aura $PM = 2\Delta x$; ensorte que $\Delta(x)$ sera $= 0$, si $x > +AC$ ou $> -AB$. »[254]

Cette condition sur Δ le contraint toutefois à faire face à une situation délicate, résumée en ces termes :

> « En premier lieu, les mêmes difficultés que nous avons exposées ailleurs & dont il paroît qu'on a reconnu la solidité, prouvent que la courbe qui représente les vîtesses initiales, doit être telle que toutes ses branches soient assujetties à une même équation, & liées par la loi de continuité. Or c'est ce qui n'a point lieu ici ; car l'équation $u = 2\Delta x$, est telle que quand $x > AC$ ou $< -AB$, u est $= 0$; or il n'y a point de fonction algébrique qui puisse représenter cette condition. »

C'est là une difficulté dont le savant ne parvient pas à se défaire. Au terme du mémoire, il conclut ainsi sur une note passablement défaitiste :

> « On voit donc qu'en faisant même les suppositions les plus favorables au calcul, il ne paroît pas possible de réduire à des formules analytiques exactes les loix du mouvement des particules de l'air, ni par conséquent de rendre raison par ces formules de la propagation du son, telle que l'expérience nous l'a fait connoître. »

Pour résumer, les restrictions raisonnables que lui imposait la permanence de la forme dans le problème des cordes vibrantes deviennent ici exorbitantes, parce qu'elles excluent les seules fonctions que le bon sens physique aurait toléré. D'Alembert en est ainsi réduit à renoncer momentanément à traiter le problème du son par le moyen de l'Analyse. Si cet état de fait l'incite à un certain pessimisme, il motive également de nouvelles réflexions, plus tardives, dont nous ne manquerons pas d'aborder la teneur.

Avant de ce faire, nous nous pencherons d'abord sur quelques travaux de Monge (1746-1818) et de Condorcet (1743-1794) publiés dans la première moitié des années 1770, travaux dont nous verrons qu'ils ont un lien avec les recherches de l'encyclo-

[254] Mémoire 34 §II, p. 140.

pédiste sur les EDP et les fonctions arbitraires[255].

2. Les interventions de Condorcet et de Monge

Dans la seconde phase de sa production scientifique, D'Alembert devient un personnage important pour une nouvelle génération de savants. Il exerce d'ailleurs une influence considérable sur certains d'entre eux. Il entretient notamment une étroite relation avec Condorcet, une correspondance active avec Lagrange, et se trouve au centre d'un univers d'une dizaine de géomètres de renom, dont Monge et Laplace. Les derniers tomes de ses *Opuscules* leur sont d'ailleurs presque exclusivement destinés[256].

Comme nous l'avons constaté, le traitement de problèmes physiques à l'aide d'EDP chez D'Alembert se caractérise par une forte imbrication entre l'Analyse et des considérations émanant de la physique. Bien sûr cela n'est pas complètement étranger au fait que sa démarche ait été conçue dans le contexte de problèmes physico-mathématiques. Cependant, cet état de fait va évoluer considérablement dans les années 1770. D'une part, l'approche dalembertienne ne sera pas reprise par ses successeurs directs. Qu'ils privilégient une approche algébrique et formelle, comme Condorcet, Lagrange et Laplace, ou plus géométrique comme Monge, l'attitude de ces nouveaux savants dans leurs mémoires physico-mathématiques consistera en effet à se défaire de considérations physiques dans la phase de manipulation des équations. D'autre part, la période que nous examinons va voir la publication de mémoires de plus en plus purement mathématiques sur les EDP dans la lignée du Mémoire 26 des *Opuscules*. Dans ces textes, les EDP sont étudiées comme un objet mathématique sans même être associées à un problème physique. Bien que nous ayons fait le choix de ne pas examiner cet aspect dans cet article, nous mentionnerons certains des mémoires en question car on y trouve des répercussions du débat sur la nature des fonctions arbitraires.

Condorcet, une approche programmatique de l'intégration des EDP

Dans l'article « Partielles, équations aux différences partielles » du second tome du *Supplément Panckoucke* que nous avons cité au chapitre précédent, Condorcet rend hommage au rôle de D'Alembert dans l'invention du calcul aux différences partielles.

Son insistance significative est probablement liée à l'influence tant scientifique que philosophique que D'Alembert a pu exercer sur lui lors du voyage qu'ils ef-

---

[255] Ce choix résulte d'un impératif chronologique sans lequel nous ne rendrions qu'imparfaitement compte de l'enchaînement des idées.

[256] Il existe des correspondances à caractère scientifique entre la plupart des membres de cette communauté. On peut s'en faire une idée grâce aux tomes 13 et 14 des *Œuvres Complètes* de Lagrange, au tome 14 de celles de Laplace, ainsi qu'aux recherches de R. Taton (v. « Une correspondance mathématique inédite de Monge », *Revue Scientifique*, 85, p. 963-989).

fectuent ensemble à Ferney et dans le sud de la France du 16 septembre au 20 novembre 1770, afin de rendre visite à Voltaire[257]. Dans les mois suivant leur retour à Paris, il présentera effectivement deux écrits sur les EDP, parus dans les *MARS* pour les années 1770 et 1771, que nous avons évoqué au chapitre 2B. Ces deux pièces s'inscrivent dans la lignée du Mémoire 26 des *Opuscules*. A l'instar de son aîné, Condorcet y considère l'EDP comme un objet d'étude mathématique, indépendamment de toute considération physique.

Cependant, dans sa seconde pièce datée de 1771[258], Condorcet consacre notamment une section à la question de la continuité des fonctions arbitraires (p. 69-72), en faisant allusion à la polémique ayant impliqué D'Alembert. Quoique moins abouties que les travaux que son aîné produira quelques années plus tard, ses recherches insistent toutefois sur la nécessité d'un bon « raccord » entre des fonctions non soumises au critère de permanence de la forme. Il présente ainsi deux exemples de fonctions polynomiales par morceau, dont il ajuste les coefficients afin que les valeurs des dérivées premières et seconde coïncident aux points de changement d'expression. Il parvient, dans ce cadre, à une conclusion qui ne laisse guère de doutes sur le fond de sa pensée :

> « On voit qu'il suffiroit ici que cette courbe fût composée de lignes qui courbes ou droites, se touchent, c'est-à-dire qu'elle fût continue quant à sa description & non quant à son équation analytique. »

Monge, de la géométrie aux EDP

Si Gaspard Monge semble apparemment moins influencé par la teneur des réflexions dalembertiennes, ses écrits, de même que ceux de Condorcet, s'inscrivent cependant dans une effervescence caractéristique de l'intérêt des savants pour la théorie des EDP au début des années 1770[259].

En novembre 1771, ses premières réflexions sur le sujet aboutissent à la présentation, à l'Académie Royale des Sciences de Paris, d'un mémoire intitulé « Sur les intégrales des équations aux différences partielles »[260]. Il insiste notamment à cette occasion sur le lien à établir entre les EDP et l'étude analytique de surfaces courbes.

Cet aspect sera plus largement développé dans deux autres mémoires lus en 1773

[257] V. Anne-Marie Chouillet et Pierre Crépel : « Un voyage d'Italie manqué ou trois encyclopédistes réunis », *Recherche sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 17, octobre 1994, p. 9-53. On peut également consulter la correspondance D'Alembert-Lagrange dans le tome XIII de ses *Œuvres Complètes* (p. 182-189).

[258] « Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *MARS* année 1771 (1774), p. 49-74.

[259] Monge correspond d'ailleurs sur ces sujets avec D'Alembert et Condorcet.

[260] D'Alembert est nommé commissaire pour l'examen de ce mémoire, aux côtés de Bossut et Vandermonde. Leur rapport (*RMAS*, 1772, f. 7-10) présenté le 22 janvier 1772, constitue une précieuse source d'informations sur cet écrit, car nous ne disposons que de la 2[de] partie, publiée en 1950 dans le 9[e] tome de la revue *Osiris*.

et publiés en 1776 dans le tome VII des Savants étrangers[261]. Dans ces écrits, le savant se concentre sur des expressions formées de fonctions arbitraires représentant un ensemble de surfaces, et tente systématiquement de déterminer la surface à laquelle appartient une courbe donnée de l'espace.

Grâce à son approche géométrique, Monge se montre moins soucieux que ses contemporains des changements de forme algébrique. Dans l'énoncé des problèmes abordés, il prend cependant systématiquement soin de préciser que les fonctions attachées à l'expression de ses conditions particulières peuvent être « continues ou discontinues », ce qui n'est pas innocent. Le savant participe en effet au débat sur la nature des fonctions arbitraires, comme en témoigne cet extrait d'une lettre du 12 février 1772, adressée à son ami du Breuil du Marchais (1739-1823)[262] :

> « M. D'Alembert n'a jamais voulu admettre l'introduction des fonctions discontinües dans l'analyse et je lui ai démontré aussi évidemment qu'aucune proposition d'Euclide que la surface qu'engendre une courbe donnée au hazard dans l'espace en tournant autour d'un axe donne toujours : $y\dfrac{dz}{dx} - x\dfrac{dz}{dy} = 0.$ ».

Quoiqu'il y adopte une position antagoniste à celle de D'Alembert, nous constatons donc que ses travaux ne sont pas sans lien avec les recherches de l'encyclopédiste dans ce domaine.

3. L'évolution du point de vue de D'Alembert

Ces travaux de Monge et Condorcet nous permettent de mettre en perspective les dernières réflexions de D'Alembert sur la nature des fonctions arbitraires, qui, comme nous le laissions précédemment entendre, révèlent une nette évolution de sa position sur le sujet. Le Mémoire 58 §VI de ses *Opuscules Mathématiques*, intitulé « Sur les fonctions discontinues », permet de s'en faire une première idée.

Dans cet écrit, D'Alembert envisage l'EDP $\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{adz}{dy} = 0$ et l'expression issue de son intégration, $\Phi(ax - y)$, dans laquelle la fonction Φ change d'expression pour une certaine valeur[263] c vérifiant : $ax - y = c$. Ψ & Γ représentant respectivement les expressions de la dérivée première de Ψ avant et après c, il remarque à l'article 9 :

> « Au reste, il y a des cas où la fonction, quoique discontinue, satisfait à l'équation $\left[\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{adz}{dy} = 0\right]$. Par exemple, si lorsque $z = [c]$, les quantités Ψ & Γ étoient égales, alors la discontinuité de la fonction $\Phi(ax - y)$ ne l'empêcheroit pas de satisfaire à l'équation différentielle proposée. »

---

[261] « Mémoire sur la construction des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *Sav. Etr.* année 1773, tome VII, 1777, p.267-300 ; et « Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *id.*, p. 305-327.

[262] V. R. Taton : *L'Oeuvre scientifique de Monge*, PUF, Paris, 1951.

[263] Pour des raisons de lisibilité, nous modifions ici les notations originales de D'Alembert.

Plus loin dans le mémoire, ce critère se trouve même généralisé au cas des fonctions arbitraires intervenant dans les EDP d'ordre n : les valeurs de leur différentielle à tout ordre, jusqu'à n, doivent coïncider aux points de changement d'expression, selon le géomètre.

Dans le tome IX de ses *Opuscules*, un imposant ensemble de manuscrits inédits, non publiés de son vivant, D'Alembert livre deux mémoires dans lesquels les réflexions précédentes sont appliquées aux problèmes des cordes vibrantes et de la propagation du son. Dans le Mémoire 59 §VII, intitulé « Sur les cordes vibrantes », il donne ainsi l'exemple d'une fonction « discontinue » polynomiale par morceau solution du problème. Dans le Mémoire 59 §VI, « Sur la vîtesse du son et à cette occasion sur l'usage des fonctions discontinues dans la solution de ce problème et des problèmes semblables », il reformule le critère évoqué ci-dessus, portant sur les fonctions « discontinues » admissibles dans la résolution d'une EDP d'ordre n. Grâce à ces nouvelles fonctions, il obtient ainsi des solutions au problème, ceci lui permettant d'achever ses recherches sur la propagation du son sur une note plus optimiste qu'en 1768.

Ces derniers travaux font donc état d'une considérable évolution de son approche vis-à-vis de la notion de fonction. Mais, ce n'est pour autant un ralliement à la position défendue par Euler, car D'Alembert continue à exiger l'absence de sauts de courbure, même s'il a renoncé à la permanence de la forme. La combinaison de ces deux aspects fait que son point de vue est plus pertinent que celui d'Euler car il est en fait assez proche de la notion moderne de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Ce changement de position de D'Alembert reste ignoré par la plupart des historiens versés dans la discipline. Youschkevitch l'avait certes remarqué, mais il en a minimisé à tort la portée en omettant que l'encyclopédiste maintient son opposition aux sauts de courbure. De plus, il faut ajouter qu'un savant éminent de la génération suivante, Laplace, échangeait encore en 1782 avec D'Alembert à propos des fonctions et des cordes vibrantes, comme en témoigne la lettre qu'il lui adresse le 10 mars[264]. Dans son « Mémoire sur les suites »[265], il développe d'ailleurs un point vue similaire à la position tardive de son aîné, en déclarant que :

> « la loi de continuité ne paroît nécessaire ni dans les fonctions arbitraires des intégrales des équations aux différences partielles infiniment petites, ni dans les constructions géométriques qui représentent ces intégrales ; il faut seulement observer que si l'équation différentielle est de l'ordre n, & que l'on nomme u sa variable principale, x & t étant les deux autres variables, il ne doit point y avoir de saut entre deux valeurs consécutives de $\left(\dfrac{\delta^{n-r}u}{\delta x^s \delta t^{n-r-s}}\right)$. »

En dépit de tenaces préjugés, l'œuvre tardive de D'Alembert présente donc un intérêt indéniable. Ses dernières recherches continuent en effet d'être pertinentes et influentes, et ce à de nombreux points de vue.

[264] *Œuvres Complètes*, t. XIV, Paris, 1912, p. 351-354.

[265] *MARS* année 1779, p. 207-309.

Cette étude partielle du débat sur la nature des fonctions arbitraires nous a finalement a également permis de montrer comment la démarche de D'Alembert vis-à-vis des EDP, fortement ancrée dans un cadre physico-mathématique, a pu avoir des répercussions en dehors du seul calcul aux différences partielles. La polémique en question va d'ailleurs se poursuivre après la mort de l'encyclopédiste. A ce propos, nous renvoyons le lecteur à l'étude de H. Burkhardt (p. 43-47) où ce dernier donne un aperçu des travaux sur le sujet de Lagrange, Laplace, Arbogast, Monge et quelques autres, des années 1780 jusqu'au début du XIXe siècle. On pourrait aussi évoquer ici un mémoire de Charles dans le tome X des *Sav. Etr.*[266]. Dans un « Fragement sur les fonctions discontinues » situé à la fin de son texte, ce dernier prend le contrepied des premières positions de D'Alembert sur la permanpas ence de la forme d'une manière inattendue. Multipliant des équations implicites de droites, il explique qu'il existe des courbes ne changeant pas d'expression bien qu'elles soient discontinues du point de vue de leur description géométrique[267]

[266] « Recherches sur les intégrales des équations aux différences finies et d'autres sujets », *Sav. Etr.*, t. X, 1785, p. 573-588.

[267] Car elles forment des lignes brisées.

Chapitre 4 : D'Alembert et les aléas de la mathématisation

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la volonté de D'Alembert de mathématiser de nouveaux problèmes physiques, comme la propagation du son, a pu entrainer indirectement des modifications profondes de ses conceptions en Analyse. Nous nous proposons ici d'examiner d'autres aspects de l'articulation entre Physique et Analyse dans l'oeuvre de l'encylopédiste. En premier lieu, nous examinerons comment il concilie ses positions atomistes concernant la divisibilité de la matière, avec les exigences fréquentes de continuité des fonctions qu'il manipule, que nous avons pu rencontrer notamment dans les mémoires sur les cordes vibrantes. Cette étude nous conduira d'abord à examiner le statut de la *Loi de continuité* dans son oeuvre, puis en second lieu à mettre en évidence le recul dont il est capable de faire preuve vis-à-vis des modèles et des résultats qui lui sont fournis par l'Analyse.

Enfin, nous énumérerons quelques pistes permettant d'approfondir cet aspect délicat des recherches de D'Alembert que sont les relations entre Physique et Analyse.

1. Atomisme, chocs et Loi de continuité dans l'oeuvre de D'Alembert[268]

L'article DURETÉ de l'*Encyclopédie* (t. V, 1755) est assez instructif quant à la position de D'Alembert dans la controverse qui oppose les atomistes et les partisans de la divisibilité de la matière à l'infini :

> « Les Newtoniens croyent que les particules premières de tous les corps tant solides que fluides sont dures & même parfaitement dures de sorte qu'elles ne peuvent être cassées ni divisées par aucune puissance qui soit dans la nature [...]. Ce sentiment est peut-être à certains égards le plus vraisemblable : en effet on ne peut guère admettre dans les particules des corps une dureté originaire et primitive. »

Conformément à la tendance majoritaire de son temps, l'encyclopédiste est atomiste. Il faut toutefois préciser qu'il se garde bien de l'affirmer répétivement avec fracas dans son *Traité de Dynamique*. En certaines circonstances, il évite même explicitement d'aborder la controverse. Mais, l'étude des chocs entre deux corps qu'il propose dans les Problèmes IX à XII est parfaitement cohérente avec sa position atomiste, comme nous allons le voir.

L'ÉTUDE DES CHOCS DANS LE TRAITÉ DE DYNAMIQUE

[268] Cette partie 1. est issue d'un exposé présenté avec Alexandre Guilbaud le 3 avril 2006 dans le cadre du séminaire *Recherches sur la généralité* du REHSEIS.

Dans le Problème IX, il va partir de l'étude du choc entre deux corps durs, c'est-à-dire, dans son langage, sans « ressort » (et sans déformation). Cette situation correspond d'ailleurs à ce que nous appellerions aujourd'hui un choc mou.

Il considère deux corps de masses m et M, nomme u et U les vitesses avant le choc, et v et V les vitesses après le choc. Puis décomposant les vitesses avant le choc comme lui indique son Principe de la Dynamique, il écrit :

$$u = v + u - v$$

$$U = V + U - V$$

Il en déduit que $m(u - v) + M(U - V) = 0$, ce qui équivaut à la conservation de la quantité de mouvement.

De plus, il explique qu'il a $v = V$, car les corps « vont de compagnie » après le choc.

Il en déduit que v et $V = \dfrac{mu + MU}{M + m}$.

Dans le Problème XII, il va en déduire les lois du choc entre deux corps élastiques. Il précise d'abord dans le Problème X que la vitesse perdue par un corps dur lors d'un choc est exactement celle qui lui aurait été restituée dans le sens opposé s'il avait été élastique.

Puis, il appelle u et v les vitesses avant le choc, et u' et v' les vitesses après le choc de deux corps *durs*, connues d'après le Problème IX. Il affirme ensuite que, si les corps sont élastiques, les vitesses après le choc sont $u' + (u' - u) = 2u' - u$ et $v' + (v' - v) = 2v' - v$.

Les vitesses dans le cas où les corps sont élastiques étant ainsi déterminées, il entreprend de montrer que, dans ce cas-là, la conservation des forces vives est vérifiée. La quantité de forces vives après le choc est

$$m(2u' - u)^2 + M(2v' - v)^2 = mu^2 + Mv^2 + 4m(u'u' - u'u) + 4M(v'v' - v'v).$$

Mais comme $u' = v'$ et $m(u' - u) + M(v' - v) = 0$, on a

$$4m(u'u' - u'u) + 4M(v'v' - v'v) = 0.$$

Ainsi, il reste $m(2u' - u)^2 + M(2v' - v)^2 = mu^2 + Mv^2$ et D'Alembert peut affirmer avoir démontré la conservation des forces vives dans le cas où les corps sont élastiques.

Si l'on compare maintenant l'approche de l'encyclopédiste avec celle d'un adversaire de Newton et des corps durs comme Jean Bernoulli dans son fameux *Discours sur les loix de la communication du mouvement*[269], on constate qu'elle est complètement à rebours. Alors que D'Alembert prend comme point de départ le choc

[269] *Discours sur les loix de la communication du mouvement qui a mérité les Eloges de l'Académie Royale des Sciences aux années 1724 & 1726, & qui a concouru à l'occasion des Prix distribuez dans les dites années*, Claude Jombert, Paris, 1727.

entre corps durs et regarde le choc élastique comme un cas particulier, dans lequel la conservation des forces vives est vérifiée, Jean Bernoulli considère comme premières et universelles l'élasticité et la conservation des forces vives. Il refuse l'existence des corps durs, ce qui revenait à critiquer l'énoncé même du Prix qu'il prétend obtenir. il avançait le raisonnement suivant :

> « En effet, un pareil principe de dureté ne sçauroit exister ; c'est une chimère qui répugne à cette loy generale que la nature observe constamment dans toutes ses opérations ; je parle de cet ordre immuable et perpetuel, établi depuis la création de l'Univers, qu'on peut apeller LOY DE CONTINUITE, en vertu de laquelle tout ce qui s'execute, s'execute par des degrez infiniment petits. Il semble que le bon sens dicte, qu'aucun changement ne peut se faire par saut, *natura non operatur per saltum* ; rien ne peut passer d'une extrémité à l'autre, sans passer par tous les degrez du milieu. »

D'Alembert et la Loi de continuité

La *Loi de continuité* est un principe métaphysique défendu notamment par Leibniz selon lequel tout se fait dans la nature par degrés insensibles. C'est un des arguments qu'il emploie dans sa polémique avec les cartésiens sur les lois régissant les chocs[270]. Jean Bernoulli, qui partageait généralement les positions de Leibniz sur ces questions, en est également un ardent partisan. Comme il l'indique dans l'extrait précédent, la *Loi de continuité* est incompatible avec l'existence des corps durs jouant le rôle de particules élémentaires dans l'approche newtonienne, car dans ce dernier cas les chocs sont instantanés, au même titre que les variations de la vitesse.

Il considère en revanche que l'élasticité est une propriété fondamentale de la matière et que, dans ce contexte, les vitesses évoluent progressivement et sans saut lors des chocs. L'exemple d'un corps lancé sur un autre immobile pour lui imprimer un mouvement est souvent invoqué comme argument, car l'élasticité permet une compression et une décompression des corps, pendant lesquelles la vitesse varie continûment. Il présente également dans son *Discours* la conservation des forces vives comme cohérente avec la *Loi de continuité*.

Dans les années 1740, les positions concernant cette *Loi* au sein des recueils de l'Académie de Berlin vont être très partagées. Maupertuis s'y oppose[271], Euler y est favorable[272]. L'approche de D'Alembert comporte, quant à elle, deux aspects, comme on peut le voir dans son Eloge de Jean Bernoulli[273]. D'abord, il explique que même les lois des chocs élastiques vont à l'encontre de ce principe :

---

[270] « Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturae », *Acta eruditorum*, 1686, p. 161-163.

[271] « Les Loix du mouvement et du repos déduites d'un Principe Metaphysique », *HAB* année 1746 (1748), p. 267-294.

[272] voir la thèse d'Angel Romero, titre : *La Mécanique d'Euler. Prolégomènes à la pensée physique des milieux continus (concepts et principes physiques, et analytisation*, thèse de Doctorat, Université Paris 7, 2007.

[273] *HARS* année 1748 (1752), p. 124-152.

> « On aurait pu demander à M. Bernoulli si dans le choc de deux corps élastiques égaux & semblables, qui viennent se frapper directement en sens contraire avec des vitesses égales, le point d'attouchement ne perd pas tout d'un coup son mouvement, & ne passe pas subitement à l'état de repos. Si cela est, comme on ne peut en disconvenir, & si d'un autre côté la matière ne peut être supposée actuellement divisée l'infini, ce qui est évident, le point de contact ne sçauroit perdre son mouvement, sans qu'une petite portion de chaque corps contigüe à ce point ne perde aussi le sien. Voilà donc, dans l'hypothèse abstraite de M. Bernoulli, deux parties de matière qui passent sans gradation du mouvement au repos. »

En d'autres termes, la vitesse subit forcément une discontinuité au point de contact lorsqu'on lance l'un contre l'autre deux corps élastiques de même masse avec des vitesses identiques et de sens contraire. Il considère ainsi avoir donné un argument déterminant contre la généralité de la *Loi de continuité*. Son idée est d'ailleurs reprise et développée par Nikolaus von Beguelin quelques années plus tard[274].

On comprend ainsi pourquoi D'Alembert pense que la *Loi de continuité* n'est pas respectée lors des chocs entre corps. Il n'en reste pas moins qu'il ne la rejette pas en bloc, lorsqu'il ajoute, toujours dans son Eloge de J. Bernoulli :

> « Ce principe, que tout se fait dans la nature par degrés insensibles [...] [est] confirmé du moins par la plus grande partie des phénomènes. »

L'encyclopédiste va effectivement adopter une position mesurée qui pourrait, à première vue, paraître ambigüe. Nous avons vu que, dans les mémoires des *Opuscules* sur les cordes vibrantes, D'Alembert défend de manière récurrente l'idée selon laquelle l'Analyse ne peut fournir de solution à ce problème que pour certaines figures initiales $2\phi(x)$ de la corde. En particulier, il explique que l'équation $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ n'est pas vérifiée lorsque la courbe comporte des « des sauts de courbure »[275]. Dans le Mémoire 1, il présente d'abord pour étayer son propos des arguments mathématiques concernant l'indétermination des dérivées secondes en cas de saut, mais il ajoute une autre raison. Il dit à propos des sauts de courbure (p. 22) :

> « C'est que dans ce cas il y a proprement au point M deux rayons osculateurs différens [...]. Or la force accélératrice en chaque point de la corde étant en raison inverse du rayon osculateur, lequel des deux rayons communs au point M doit servir à déterminer la force en ce point M ? C'est ce qu'il est impossible de fixer, & il l'est par conséquent aussi de résoudre le Problême dans ce cas-là. »

Pour mieux cerner le propos de l'encyclopédiste, rappelons que $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ est la force accélératrice, et que $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ représente la courbure conformément aux hypothèses du problème. Il précise ensuite plus loin :

> « [...] la nature de la force accélératrice est de croître ou de décroître par degrés insensibles, & non brusquement & par sauts. »

[274] « Recherches sur l'existence de corps durs », *HAB* année 1751, p. 331-355.

[275] En termes modernes, cela revient à peu près à interdire à la dérivée seconde d'être discontinue.

En somme, un argument physique, la continuité de la force accélératrice $\frac{d^2y}{dt^2}$, confirme la nécessité de l'absence de sauts de courbure. Insistons néanmoins sur un point. D'Alembert n'en déduit pas pour autant que toutes les figures initiales de la corde rencontrées dans la nature sont exemptes de sauts de courbure. Si de tels sauts, ainsi que les points anguleux, n'existaient pas dans la réalité, il n'aurait pas à exclure certaines figures initiales du champ de compétence de l'Analyse, il lui suffirait de dire que la question ne se pose pas. Or sa position consiste bien à affirmer que c'est l'Analyse qui échoue en cas de saut. Ainsi, comme il maintient à la fois la continuité de la force accélératrice et l'existence de figures initiales comportant des sauts, il est obligé de concéder que, lorsque cette dernière situation se produit, c'est l'EDP $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ qui ne décrit plus le phénomène[276]. Mais, malgré tout, le fait d'invoquer la régularité de la force accélératrice embarrasse quelque peu D'Alembert vis-à-vis de ce qu'il a pu dire par ailleurs concernant la *Loi de continuité*. Il se sent obligé de se justifier comme on peut le voir dans la suite du même passage (p. 24) :

> « Envain objecteroit-on que la loi de continuité n'est pas une loi générale, puisqu'elle ne s'observe pas dans le choc des corps, même des corps élastiques. Je le sais, & je suis même, si je ne me trompe, le premier qui aye fait cette importante remarque ; je sais encore que les loix du choc des corps sont soumises au calcul analytique, quoique la loi de continuité n'y ait pas lieu. Mais le cas est bien différent ; il s'agit ici d'une suite de points liés ensemble, dont le mouvement est supposé assujetti à une même équation analytique[277], & par conséquent ne doit point souffrir de sauts, parce que l'analyse n'en souffre pas. »

D'Alembert fait notamment allusion dans cette citation au raisonnement qu'il a présenté dans son Eloge de Jean Bernoulli pour montrer que même les chocs entre corps élastiques violent la *Loi de continuité* en certaines situations. Mais cet extrait permet surtout de préciser la manière générale dont D'Alembert envisage cette *Loi*. Il s'y oppose dans le cas des chocs, alors qu'il en est partisan pour les cordes vibrantes. Il semble également penser qu'elle s'applique aux lois régissant l'écoulement et l'équilibre des fluides[278]. On peut donc résumer ainsi sa position :

- La *Loi de continuité* n'est pas un principe métaphysique universel,
- elle s'applique lorsque le milieu est continu ou considéré comme tel (cordes, fluides).

Quoiqu'il puisse paraître, il n'y a pas vraiment de contradiction fondamentale, et l'encyclopédiste a de réelles motivations pour adopter une telle approche. En effet, le rejet de la *Loi de Continuité* est très lié à l'atomisme et donc à la conception de la matière à un niveau microscopique. Mais le problème se pose différemment si on regarde les phénomènes d'un point de vue macroscopique. Dans ce contexte, l'invocation de la continuité des grandeurs (au sens physique) est d'autant plus

[276] D'Alembert le dit explicitement dans le Supplément 1 du Mémoire 25 (p. 168).

[277] Allusion à l'EDP.

[278] Les recherches d'Alexandre Guilbaud concernant les mémoires de D'Alembert sur ce thème permettent d'affirmer cela.

compréhensible qu'on utilise le calcul différentiel pour traiter analytiquement des problèmes comme les celui des cordes vibrantes et celui des fluides, ce qui n'était pas le cas pour les chocs. Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, le calcul de quotients différentiels est problématique en cas d'irrégularités des fonctions. C'est d'ailleurs très probablement cette difficulté qui pousse D'Alembert à défendre la continuité dans certains cas précis.

Par ailleurs, la dernière citation de D'Alembert que nous avons mentionnée montre qu'en 1761 (Mémoire 1), même si les considérations issues de l'Analyse et de la physique sont distinguées par le savant, elles n'ont pas encore acquis une autonomie réciproque, et sont parfois entremêlées. Cette autonomie va se développer dans les mémoires ultérieurs du savant, comme nous allons le voir dans la suite de ce chapitre.

Ajoutons enfin que D'Alembert amorce un revirement notable vis-à-vis de la continuité de grandeurs comme la force accélératrice dans le Mémoire 59 §VII des *Opuscules*. Il envisage en effet le raisonnement suivant, en lui accordant un certain crédit (f. 286-287) :

> « Or ne pourroit on pas dire, que comme il n'y a de *réel* ici que le temps et l'espace parcouru et que ce qu'on appelle *vitesse*, *force acceleratrice*, &c. ne sont en quelque sorte que des êtres metaphysiques, ou plutôt de simples expressions abregées du rapport de dx à dt, et de ddx à dt^2, il suffit pour la possibilité de la solution qu'il n'y ait aucune contradiction dans la valeur de l'espace x repondante au temps t,[...] ».

En termes plus explicites, cela revient à dire que vitesse et force accélératrice ne sont pas soumises à la *Loi de contiuité*, car ce sont juste des constructions de l'esprit et non des entités réelles, contrairement à l'espace x et au temps t. Ceci étant, D'Alembert ne va guère plus loin dans cette voie et se contente de dire qu'il soumet cela « à l'examen des Geometres », après avoir répété les objections de nature mathématique habituelle.

2. Une prise de recul vis-à-vis des représentations mathématiques

Dans sa résolution du problème des cordes vibrantes, que cela soit dans *HAB* année 1747 ou dans le Mémoire 1, d'Alembert commence par établir l'EDP supposée régir les vibrations : $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$. Bien entendu, il fait consciemment des hypothèses idéalisant le phénomène : la petitesse des vibrations, qui revient à dire que la force agissant sur les points de la corde était toujours perpendicualire à l'axe, et la négligence de la « roideur de la corde » et de « l'action réciproque de toutes ses parties [entre elles] » (donc des frottements). C'est d'ailleurs cette seconde hypothèse, plus explicite dans le Mémoire 25, qui éloigne d'autant plus l'équation étudiée par D'Alembert de la réalité.

Ensuite, le savant intégre l'EDP et aboutit finalement à l'expression $y = \phi(x +$

$t) + \phi(x - t)$[279], et explique que toutes les figures initiales ($2\phi(x)$) ne permettent pas d'utiliser la présente solution. Mais évidemment, il comprend rapidement, dès le Mémoire 1, que sa solution ne lui permet pas de rendre compte de ce qu'il constate dans la réalité physique. Elle échoue effectivement en cela d'ailleurs à deux niveaux :

– Comme D'Alembert a scindé les figures initiales de la corde en deux groupes : celles qu'il admet, et celles qui se refusent à l'Analyse, il ne peut, dans le second cas[280], utiliser le raisonnement qui fonctionnait dans le premier pour expliquer pourquoi le son rendu est le même quelle que soit la figure.
– Sa solution donne des vibrations périodiques ne cessant jamais.

Expliquer l'arrêt des vibrations

S'il considère que c'est à la seule Physique d'expliquer le son rendu par une corde (Mémoire 1, p. 40), il va néanmoins tenter de perfectionner son approche de façon à corriger la seconde lacune. Après un brève tentative dans le Mémoire 1, il s'y attache dans le Supplément 3 du Mémoire 25 (*Opuscules*, t. IV, 1768), en ajoutant des termes de résistance à l'EDP supposée gouverner les vibrations.

Il considère d'abord une résistance proportionnelle à la vitesse et étudie l'EDP (art. 3-7) :

$$\frac{ddy}{dx^2} - R\frac{dy}{dt} = \frac{ddy}{dt^2}.$$

Mais comme il se borne à rechercher un instant t_1 où, pour tout x, y et $\frac{dy}{dt}$ s'annulent simultanément, il n'envisage pas que l'extinction des vibrations puisse être asymptotique. Il passe ainsi à côté de l'amortissement exponentiel en $e^{-\frac{Rt}{2}}$ qui apparaît pourtant dans la solution de son EDP.

Face à ce qu'il perçoit comme un échec, il envisage une résistance $2\xi(x)$ ne dépendant que de l'abscisse x (art. 13-73) et établit l'équation :

$$\frac{ddy}{dx^2} - 2\xi(x) = \frac{ddy}{dt^2}.$$

Puis, il obtient la solution générale $y(x,t) = \phi(x+t) - \phi(t-x) + 2\int dx \int \xi dx$. Comme il parvient sous certaines hypothèses à déterminer un temps t_1 pour lequel on a, quel que soit x, $y(x, t_1) = 0$ et $\frac{dy}{dt}(x, t_1) = 0$, il en déduit que sa nouvelle EDP rend compte de la cessation des vibrations. Bien entendu, les ajustements qu'il se permet pour atteindre cette conclusion sont exagérés, puisqu'il est contraint d'adapter la fonction ξ représentant la résistance en fonction de l'allure et de la vitesse initiale de la corde.

---

[279] Dans le cas d'une corde lâchée sans vitesse initiale d'une position $2\phi(x)$.

[280] En particulier lorsque la corde forme un triangle à $t = 0$, ce qui arrive le plus fréquemment quand on lâche une corde.

Mais un autre point mérite d'attirer notre attention. D'Alembert maintient tout au long de ce Supplément que, si la corde passe dans la situation rectiligne et que simultanément la vitesse de tous ses points est nulle, le mouvement s'arrête. Pourtant, un simple coup d'oeil à l'EDP $\frac{ddy}{dx^2} - 2\xi(x) = \frac{ddy}{dt^2}$ permet de voir qu'il peut très bien y avoir dans cette situation une accélération $\frac{ddy}{dt^2}$ qui entraîne la poursuite du mouvement.

Le Mémoire 59 §VII nous montre que D'Alembert est bien conscient de cet aspect. Cependant, il continue à soutenir que, dans ces conditions, les vibrations cessent. Son raisonnement à cet égard consiste à dire que l'EDP ne représente plus le phénomène, une fois qu'on a obtenu l'instant t_1 recherché, ou plus exactement que tout se passe comme si le terme de résistance s'évanouissait à t_1 (f. 326-329).

Modèles et autonomie entre Physique et Analyse

L'oeuvre tardive de D'Alembert, surtout à partir du tome IV des *Opuscules* (1768), montre donc une prise de conscience certaine de la part du savant de l'écart entre le phénomène physique et l'équation censée le représenter. D'Alembert est très loin de l'idée que l'équation est équivalente au phénomène. Sa prise de distance apparaît à deux niveaux. D'une part, il envisage successivement et sans préjugés différentes EDP et examine si elles peuvent rapprocher sur un point (la cessation des vibrations) sa solution de la réalité. D'autre part, il explique que l'EDP ne décrit qu'un temps le phénomène, jusqu'à ce qu'en un instant, les ordonnées et les vitesses s'annulent.

Avec toutes les précautions que suppose ce terme, on peut considérer que D'Alembert a conscience qu'il ne manipule que des *modèles*, de toutes façons très idéalisés. On peut d'ailleurs remarquer qu'à deux reprises dans le Mémoire 25 (Supplément 1, p. 169, et Supplément 2, p. 182), il explique que l'EDP qu'il est en train d'étudier ne représente certes plus la corde vibrante, mais qu'elle est malgré tout le modèle d'un phénomène qui peut être imaginé, ce qui revient en somme à parler d'expérience de pensée.

Par ailleurs, la capacité de D'Alembert à adopter de nouveaux modèles apparaît également dans le *Traité de Dynamique*. Dans le Problème XIV, l'encyclopédiste se saisit d'un modèle alternatif aux corps durs et envisage des corps séparés par des ressorts afin de traiter le problème des chocs simultanés. Il poursuit ces recherches dans Supplément à l'Art. 176 du *Traité de Dynamique*[281], puis dans les Mémoires 36 §I[282], 52 §I[283], 59 §XIV[284] et 59 §XXX[285].

281 *Opuscules*, t. I, 1761, p. 299-303 ; *O.C.*, vol. III/1.

282 « Sur la loi de la compression des Ressorts », *Opuscules*, t. V, 1768, p. 216-222 ; *O.C.*, vol. III/5..

283 « Réflexions sur la Théorie des Ressorts », *Opuscules*, t. VII, 1780, p. 1-38 ; *O.C.*, vol. III/7.

284 « Sur le choc des corps à ressort », *Opuscules*, t. IX, MS 1792, f. 1-222 et 276-299 ; *O.C.*, vol. III/9.

285 « Sur la force des ressorts & sur la courbe élastique », *Opuscules*, t. IX, MS 1793, f. 359-368.

De plus, cette prise de recul s'accompagne, dans l'oeuvre de D'Alembert, d'une autonomie croissante entre les considérations issues de la Physique et de l'Analyse. Ce constat est notamment confirmé par la distinction que fait l'encyclopédiste dans le Mémoire 59 §VII, et que nous avons mise en évidence dans le chapitre 5 de la partie I, lorsqu'il oppose l'EDP prise dans le contexte d'un problème physico-mathématique et la même équation vue sous un angle purement mathématique. Il explique alors que si on regarde l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dt^2}$ comme modélisant les vibrations de la corde, on peut éventuellement autoriser les sauts de courbure, mais qu'en revanche, mathématiquement, la rigueur impose l'absence de sauts de courbure.

3. Conclusion

Dans le chapitre 3 de la partie II, nous avons vu comment la mathématisation de problèmes physiques comme la propagation du son avait des implications sur les maths elle-même et amenait indirectement à réenvisager la notion de fonction.

Nous avons vu dans ce chapitre des mouvements d'une autre nature. Concernant la *Loi de continuité*, nous avons vu un principe qui perd sa nature métaphysique. D'Alembert ne le considère plus que physiquement valide et légitime, du fait de ses conséquences commodes dans la manipulation du calcul différentiel.

A ce titre il est significatif de constater que D'Alembert écrit toujours « loi de continuité » sans majuscule, et qu'il opère un glissement sémantique important. En effet, le plus souvent dans l'oeuvre du savant, ce terme ne désigne pas le principe leibnizien dont nous parlions ici, mais concerne plutôt l'Analyse. D'Alembert dit d'une courbe qu'elle est « assujettie à une loi de continuité », lorsque son équation reste la même partout, c'est-à-dire lorsqu'elle vérifie la permanence de la forme, pour reprendre les mots que nous avons employés jusqu'à maintenant.

Ce glissement n'est pas innocent. Il peut être interprété comme une préfiguration de l'idée que l'univers physique n'est pas aussi harmonieux et régulier que le voudrait l'Analyse.

Ce constat, en germe dans l'oeuvre de D'Alembert, est lié à sa prise de conscience progressive que mathématiser consiste plus à choisir *une* équation, qu'à établir *l'*équation, comme nous l'avons vu en 2.

Bien entendu, ces conclusions provisoires mériteraient d'être confrontées plus rigoureusement à d'autres aspects de l'oeuvre de l'encyclopédiste, comme ses recherches sur les fluides. Elles mettent également au jour la nécessité d'étudier de près ses réflexions sur la dureté et l'élasticité dans son oeuvre tardive.

Conclusion de la partie II

Les études transversales auxquelles nous venons de procéder nous permettent donc de tirer quelques conclusions supplémentaires.

Convergence et existence des développements en série

D'abord, nous avons montré au chapitre 1 que l'attitude de D'Alembert vis-à-vis des séries comporte deux aspects. Le premier est assez connu et documenté, il s'agit du rejet de l'utilisation des séries divergentes dans des raisonnements mathématiques. Un second est passé plus inaperçu, du moins dans le milieu des historiens des mathématiques : la remise en cause par l'encyclopédiste de l'existence d'un développement en séries entières, et même d'un développement en série de puissances de x, pour une fonction prise au hasard.

D'Alembert expose ses réflexions en la matière surtout à partir du tome IV des ses *Opuscules*, et elles vont au fur et à mesure fonder ses positions concernant l'impossibilité d'écrire en général une fonction sous la forme d'une série trigonométrique. Cependant, s'il est juste de souligner que toute fonction n'est pas nécessairement analytique, les situations qu'envisage D'Alembert (équations fonctionnelles) pour prouver qu'une telle supposition conduit à des erreurs sont plus sujettes à caution.

« Résoudre » une EDP dans un cadre physico-mathématique

Dans les chapitres 2A et 2B, nous avons ensuite étudié les deux contributions majeures de D'Alembert concernant les équations aux dérivées partielles.

Nous sommes d'abord revenu sur la plus célèbre : l'introduction couronnée de succès du calcul aux différences partielles pour traiter les problèmes physico-mathématiques. Dans ce domaine, nous avons utilisé les *Opuscules Mathématiques* pour éclairer sous un jour nouveau l'ensemble des travaux de D'Alembert. Nous appuyant sur ses recherches concernant les fluides et les cordes vibrantes, nous avons expliqué que sa démarche pour « résoudre » un problème s'articulait en trois phases : mise en équation, intégration de l'EDP et confrontation du résultat avec d'autres données caractéristiques du problème. Nous avons ensuite montré qu'il était inapproprié d'appeler ces données conditions initiales et aux limites et qu'il était préférable de les qualifier d'équations complémentaires, pour éviter tout anachronisme. Enfin, nous avons cherché à préciser les notions d'unicité et d'existence des solutions dans la démarche du savant, ce qui nous a permis de détecter une certaine forme de déterminisme physique. Il apparaissait que, plutôt que l'existence, la notion importante dans son approche était la *possibilité de résoudre*, liée à l'existence d'une expression formelle à l'aide de fonctions usuelles.

L'étude des EDP en tant qu'objet mathématique

Au 2B, nous avons mis en évidence le rôle majeur joué par D'Alembert dans le déclenchement d'un mouvement d'étude systématique des EDP en tant qu'objet mathématique à partir de le fin des années 1760. Le Mémoire 26 qui incarne la contribution de l'encyclopédiste à ce courant constitue le point saillant du tome IV de ses *Opuscules Mathématiques.* Nous avons montré que les fondements de sa démarche faisaient intervenir des textes de Lagrange et Euler, aussi bien que ses propores recherches, et nous avons dégagé la spécificité de son approche. Nous avons par ailleurs remarqué que la reconnaissance du calcul aux différences partielles en tant que branche autonome de l'Analyse accompagne le bouillonnement autour de cette manière d'étudier les EDP. Nous avons finalement donné un aperçu de la continuation de ce mouvement avec des savants comme Condorcet, Monge, Laplace...

Etapes et motifs du renoncement progressif à la permanence de la forme (1768-1781

Les précisions apportées au chapitre 2A à propos de la notion de solution chez D'Alembert nous ont permis au chapitre 3 d'envisager sous un angle nouveau le débat sur la nature des fonctions arbitraires et en particulier l'évolution de D'Alembert vers un renoncement à la permanence de la forme. Le souci de *pouvoir* résoudre des problèmes comme celui de la propagation du son dans une colonne d'air ont pu l'amener progressivement à ce revirement dans lequel il a probablement été conforté par des réflexions de Condorcet sur les fonctions publiées dans les *MARS* année 1771.

Du statut de la Loi de continuité à la considération de modèles

Dans le chapitre 4, en examinant comment D'Alembert concilie une conception atomiste de la matière avec ses exigences sur la régularité des fonctions, nous avons été amené à observer que, dans son oeuvre, la *Loi de continuité* est déchue de son statut de principe physique universel. Pour lui, elle ne s'applique plus que dans certains cas spécifiques. De surcroît, le terme de *loi de continuité* n'est progressivement plus employé pour désigner la notion métaphysique d'origine leibnizienne. En effet, il fait le plus souvent référence à une courbe dont l'équation ne change pas sur son domaine de définition.

Poursuivant nos réflexions sur l'articulation entre Analyse et Physique dans les *Opuscules*, nous avons montré que la fin de l'oeuvre de D'Alembert est marquée par une prise de recul croissante vis-à-vis de l'équivalence entre les EDP et les phénomènes physiques qu'elles sont censées représenter. De plus en plus, son approche consiste à choisir consciemment un *modèle* (une EDP) en fonction de l'aspect du phénomène qu'il veut expliquer. Cette démarche semble se retrouver dans plusieurs pans de son oeuvre, mais le Supplément 3 du Mémoire 25 en est une bonne illustration. Rappelons à propos de ce passage, que nous avions indiqué au chapitre 4 de la partie I qu'il pouvait être interprété comme les balbutiements du contrôle des EDP.

Les quelques conclusions que nous venons de livrer donnent un aperçu fidèle des doutes et incertitudes de D'Alembert dans la seconde moitié de son oeuvre. Elles confirment l'intérêt scientifique et historique des *Opuscules* et montrent également qu'à cette époque, le savant est encore capable d'intuitions intéressantes, influant ou accompagnant à sa manière l'évolution du monde scientique.

Bilan et perspectives

1. Bilan

Les sources

Comme nous l'avons dit dès l'introduction, les mémoires de D'Alembert sur les cordes vibrantes et les EDP étaient pour l'essentiel connus. Ceux composés au début de sa carrière ont été examinés à de nombreuses reprises par divers mathématiciens, mécaniciens et historiens des sciences ; les derniers ont été abordés parfois mais beaucoup plus négligés.

Les deux manuscrits directement consacrés au sujet, le « Manuscrit de 1755 » (préfiguration du Mémoire 1 du tome I des *Opuscules*) et le Mémoire 59 §VII du tome IX inédit des *Opuscules* étaient répertoriés par Gilles Maheu dans sa thèse « bio-bibliographique » sur D'Alembert ; ils étaient cités à l'occasion mais n'avaient été qu'effleurés par les historiens.

La revalorisation des écrits des années soixante à quatre-vingts constitue l'aspect central de cette thèse. Nous y avons également esquissé le lien avec divers autres textes de l'encyclopédiste traitant de thèmes voisins d'analyse ou de mécanique plus en relation qu'on ne le croit avec les EDP et les cordes vibrantes : équations fonctionnelles, séries, élasticité, etc.

L'essentiel

Cette thèse se situe d'abord dans le cadre éditorial. Pour pouvoir étudier valablement un domaine, il convient avant tout de disposer d'un corpus fiable, correctement daté, avec ses variantes et un minimum d'explications ne s'éloignant pas trop de l'auteur et de son époque, mais jetant des ponts sur l'amont et l'aval, sur les problèmes voisins. En ce sens, nous avons donc cherché à établir un instrument de travail, à éclairer quelques enjeux, mais aussi, comme le dirait D'Alembert à présenter « des difficultés que nous invitons les Géomètres à examiner et à résoudre ».

Ceci dit, nous espérons être parvenu tout de même à dégager quelques points intéressants pour l'historiographie. Nous en rappelons quelques uns :

- L'élaboration progressive par D'Alembert de l'idée selon laquelle les fonctions représentant l'allure initiale d'une corde ne doit pas comporter de « sauts de courbure »,
- L'évolution du savant vers le renoncement à la permanence de la forme,
- Ses réflexions originales concernant l'impossibilité de développer toute fonction en séries entières ou trigonométriques,
- Les arcanes de la démarche de résolution des problèmes faisant appel à des EDP, et leurs liens dans l'esprit du savant avec la polémique sur les fonctions arbitraires,

– La prise de recul croissante de D'Alembert par rapport aux modèles mathématiques.

Mais ces études thématiques demanderont à être replacées dans des cadres plus larges, notamment par rapport à l'histoire des XIXe et XXe siècles, tant en ce qui concerne les EDP que les fondements de l'analyse, les séries, le son et la musique, l'élasticité ... Nous allons en dire quelques mots ci-dessous.

2. Perspectives

Editoriales

Notre première tâche après cette thèse consiste en la mise au point finale des présentations et annotations des Mémoires 1 et 5 (tome I), 23, 25, 26 et 28 (tome IV) des *Opuscules Mathématiques* (vol. III/1 et III/4 des *O.C.*). Pour les mémoires 1 et 25, les présentations sont des versions voisines de certains chapitres de la thèse ; quant aux mémoires annotés, ils sont en annexes. Pour les autres mémoires, des versions assez avancées ou quasi-prêtes existent et sont le résultat quelquefois de collaborations avec des étudiants.

Notre seconde tâche est la coordination générale du volume III/4, c'est-à-dire du tome IV (1768) des *Opuscules* dans son ensemble, comprenant les Mémoires 21-29. Les Mémoires 21, 22, 24, 27 et 29 sont en cours de traitement par d'autres chercheurs, ainsi que divers compléments des Mémoires 23 et 28. L'introduction générale du volume est en préparation, son canevas est bien établi et les recherches en archives sur les divers points à traiter assez bien avancées. Mais cela exige un travail assez long aussi bien sur le plan technique (vérification des transcriptions, rendu des variantes, problèmes divers de latex, bibliographies, index, etc.) qu'une vision d'ensemble du D'Alembert et des sciences mathématiques et physico-mathématiques des années soixante.

Une troisième tâche consiste en l'achèvement du vol. I/4b contenant les premiers textes sur les cordes vibrantes. Deux des trois textes sont annotés, le troisième (c'est-à-dire le premier, le plus célèbre) a été nécessairement travaillé en détail pour comprendre les autres. Les présentations de tous ces textes forment donc un prolongement naturel de notre thèse, ce qui devrait progresser d'autant plus vite que nous aurons le renfort d'Umberto Bottazzini, lui-même éditeur il y a quelques années des mémoires de Daniel Bernoulli sur les cordes vibrantes.

Enfin, seul ou avec d'autres, nous étudions et traitons pour l'édition un certain nombre de mémoires contenus dans des volumes moins prioritaires que les trois cités ci-dessus dans le cadre des *O.C.*, tout particulièrement plusieurs mémoires inédits du tome IX des *Opuscules* mais aussi des mémoires imprimés dans les *Opuscules*, tomes I-VIII, ou dans les recueils des académies de Paris, Berlin ou Turin. Ils portent sur des thèmes tels que la « courbe élastique », les tautochrones, les séries, les modèles d'élasticité, les équations fonctionnelles, les principes de la mécanique, plus généralement les mathématiques éparpillées dans les écrits plus physiques.

Cela conduira également à annoter des lettres ou des articles de l'*Encyclopédie*.

Etudes transversales

Bien entendu, l'édition n'est pas uniquement une fin en soi et de nombreux sujets de recherche se dégagent d'un examen un peu scrupuleux des écrits de D'Alembert, ne serait-ce qu'en raison de la profusion des intuitions inabouties, des doutes et objections que le savant encyclopédiste « laisse aux Géomètres futurs ». Nous ne pouvons qu'évoquer ici quelques suggestions.

Ne s'agit-il pas de revisiter les relations entre mathématiques et physique chez cet auteur et plus généralement au Siècle des Lumières, en le comparant évidemment à J. et D. Bernoulli, Euler, Clairaut, Lagrange, Laplace et bien d'autres, sans parler des trois ancêtres (Descartes, Newton et Leibniz) ? A ce titre, une reprise, cent ans après, de l'immense contribution systématique de H. Burkhardt fournirait matière à plusieurs thèses.

Sur le plan plus spécifiquement mathématique, voici une liste de thèmes que nous n'avons fait qu'aborder au plus près des textes dalembertiens et qui mériteraient un peu plus de recul, afin de voir comment enrichir l'historiographie déjà abondante à leur égard :

- L'utilisation des séries entières en dehors de leur disque de convergence, leur comportement sur le cercle de convergence,
- Le lien entre équations différentielles et équations aux différences finies,
- Le classement des fonctions admettant ou non un développement en série trigonométrique, et coïncidant avec celui-ci,
- Les fonctions de classe C^p avec p non entier,
- L'émergence de la notion de fonction analytique,
- Qu'est-ce qu'une courbe « composée d'arcs de cercle infiniment petits qui ne sont pas liés entr'eux en aucun point de la courbe par la loi de continuité » (Mémoire 25, p. 199) ? Un prémice de la fonction de Weierstrass ?
- Les conditions de régularité garantissant l'équivalence entre une EDP du 2$^{\text{nd}}$ ordre comme celle des ondes et un système de deux formes différentielles rendues exactes,
- La sensibilité aux conditions initiales. L'exemple de D'Alembert (Mémoire 25, p. 194) peut-il être considéré comme un pressentiment de certains phénomènes délicats ?
- Les modèles mécaniques de la corde vibrante : les forces accélératrices, les tensions, la raideur, l'élasticité, l'amortissement... Qu'a-t-on dit au XIX$^{\text{e}}$siècle de ces questions, et qu'en sait-on aujourd'hui ?

Nous envisageons à ce propos des collaborations européennes, dans le prolongement du colloque de Trente de septembre 2006 « D'Alembert, i Lumi e l'Europa », organisé par Luigi Pepe, et des projets de l'université de Francfort sur les relations et les traductions franco-allemandes proposés par Moritz Epple.

Les projets sont donc multiples, et il existe de nombreux axes de recherches à explorer. Ils permettront également d'enrichir les enseignements d'Histoire des Mathématiques et ainsi les formations dispensées dans les cursus universitaires.

Liste des abréviations[286]

Abréviations courantes

BI	Bibliothèque de l'Institut de France (Paris)
cf.	*confer* (comparer avec)
chap.	chapitre(s)
f.	feuillet(s)
fig.	figure(s)
ms., mss	manuscrit, manuscrits
p.	page(s)
t.	tome(s)
vol.	volume(s)

Titres de périodiques ou d'ouvrages

Cause des vents	D'Alembert, *Réflexions sur la cause générale des vents Pièce qui a remporté le prix proposé par l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Prusse pour l'année 1746*, David l'aîné, Paris, 1747.
Encyclopédie	*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences des arts et des métiers* (Diderot et d'Alembert éd.)
Essai sur la Résistance des Fluides	D'Alembert, *Essai d'une nouvelle Théorie de la Résistance des Fluides*, David l'aîné, Paris, 1752.
HAB	*Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres* (Berlin)
NMAB	*Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres* (Berlin)
HARS	*Histoire de l'Académie royale des sciences* (Paris), partie « Histoire »
MARS	*Histoire de l'Académie royale des sciences* (Paris), partie « Mémoires »
Sav. Etr.	*Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie royale des sciences par divers sçavans, et lus dans ses assemblées*
O.C., vol. N/n	*Œuvres complètes de D'Alembert*, Série N, volume n
Mémoire N	D'Alembert, $N^{\text{ème}}$ Mémoire, *Opuscules Mathématiques*
RMAS	*Registres [manuscrits] de l'Académie royale des sciences* (Paris)
Supplément	*Supplément à l'Encyclopédie*,

[286] Nous utilisons les mêmes abréviations que dans les *Oeuvres Complètes* de D'Alembert.

Traité des Fluides	D'Alembert, *Traité de l'équilibre et du mouvement des Fluides, pour servir de suite au Traité de Dynamique.*
Mélanges de Turin	*Mélanges de philosophie et de la mathématique de la société royale des sciences de Turin*
Comm. Acad. Petrop.	*Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*
Nov. Comm. Acad. Petrop.	*Novi Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*
Acta Acad. Petrop.	*Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitana*
E... (ex. E287)	repérage des oeuvres d'Euler dans l'index de G. Eneström

Bibliographie[287]

Bibliographie primaire

Sources manuscrites

D'ALEMBERT (Jean Le Rond)

- « Observations sur deux mémoires de MM. Euler et Daniel Bernoulli insérés dans les Mémoires de 1753 », manuscrit inédit soumis en 1755, Mss I-M6 et I-M7, Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften.
- *Registres Manuscrits de l'Académie des Sciences*, 1772, Archives de l'Académie des science de Paris, f. 7-10.
- Mémoire 59 §VI, « Sur la vitesse du son et à cette occasion sur l'usage des fonctions discontinues dans la solution de ce problème et de problèmes semblables », *Opuscules Mathématiques*, tome inédit, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut, f. 95-160.
- Mémoire 59 §VII, « Sur les cordes vibrantes », *Opuscules Mathématiques*, tome inédit, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut, f. 271-334.
- Mémoire 59 §XIV, « Sur le choc des corps à ressort », *Opuscules Mathématiques*, tome inédit, MS 1792 de la Bibliothèque de l'Institut, f. 1-222 et 276-299 ; *O.C.*, vol. III/9.
- Mémoire 59 §XXX, « Sur la force des ressorts & sur la courbe élastique », *Opuscules Mathématiques*, tome inédit, MS 1793 de la Bibliothèque de l'Institut, f. 359-368. .

Sources imprimées

BEGUELIN (Nikolaus von)

- « Recherches sur l'existence de corps durs », *HAB* année 1751 (1753), p. 331-355.

BERNOULLI (Daniel)

- *Hydrodynamica, sive De Viribus et Motibus Fluidorum Commentative*, Strasbourg, 1738.
- « De sonis multifariis quos laminae elasticae diversimode edunt disquisitiones mechanico-geometricae experimentis acusticis illustratae et confirmatae », *Comm. Acad. Petrop.*, t. XIII, année 1741-43, p. 167-196.

[287] Cette bibliographie rassemble les références des ouvrages, mémoires et articles utilisés dans le tome I de cette thèse et dans les annotations des mémoires de D'Alembert figurant dans le tome II d'Annexes.

- « Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 & 1748 », *HAB* année 1753 (1755), p. 147-172.
- « Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps », *HAB* année 1753 (1755), p. 173-195.
- « Recherches physiques, mécaniques et analytiques sur le son & les tons des tuyaux d'Orgues différemment construits », *MARS* année 1762 (1764), p. 431-485.
- « Mémoire sur les vibrations des cordes d'une épaisseur inégale », *HAB* année 1765 (1767), p. 281-306.
- « De summatione serierum qurundam incongrue veris earumque interpretatione et usu » (*Nov. Comm. Acad. Petrop.*, t. XVI, 1771 (1772), p. 71-90 ; *Werke*, Bd. II, p. 101-116.

BERNOULLI (Jean)
- *Discours sur les loix de la communication du mouvement qui a mérité les Eloges de l'Académie Royale des Sciences aux années 1724 & 1726, & qui a concouru à l'occasion des Prix distribuez dans les dites années*, Claude Jombert, Paris, 1727.
- « Hydraulica nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentia pure mechanicis. Anno 1732 », *Opera Omnia*, vol. 4, (Lausanne et Genève, 1742), p. 387-493.

CLAIRAUT (Alexis-Claude)
- « Recherches générales sur le calcul intégral », *MARS* année 1739 (1741), p 425-436.
- « Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre », *MARS* 1740 (1741), p 293-323.
- *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique*, Paris, 1743.

CHARLES (Jacques)
- « Recherches sur les intégrales des équations aux différences finies et d'autres sujets », *Sav. Etr.*, t. X, 1785, p. 573-588.
- « Recherches sur le Calcul intégral », *MARS* année 1784 (1787), p. 348-352.

CONDORCET (Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marquis de)
- « Mémoire sur la nature des Suites infinies, sur l'étendue des Solutions qu'elles donnent, & sur une nouvelle méthode d'approximation pour les Équations différentielles de tous les ordres », *MARS* année 1769 (1771), p. 193-228.
- « Mémoire sur les équations aux différences partielles », *MARS* année 1770 (1773), p. 151-178.

- « Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *MARS* année 1771 (1774), p. 49-74.
- *Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, article « Partielles, équations aux différences partielles », tome II, Paris, 1785, p. 526-529.

Cousin (Jacques-Antoine-Joseph)
- « Remarques sur la manière d'intégrer par approximations les Équations différentielles, et les Équations aux différences partielles », *MARS* année 1783 (1786), p. 649-683.
- « Mémoire sur l'intégration des Équations aux différences partielles », *MARS* année 1784 (1787), p. 407-431.
- *Introduction à l'étude de l'astronomie physique*, Didot l'aîné, Paris, 1787.

D'Alembert (Jean Le Rond)
- *Traité de Dynamique*, 1re édition, Paris, 1743.
- *Réflexions sur la cause générale des Vents*, David l'aîné, Paris, 1747 ; *O.C.*, vol. I/5.
- « Recherches sur le calcul intégral », *HAB* année 1746 (1748), p. 182-224 ; texte n°2, *O.C.*, vol. I/4a.
- « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration », *HAB* année 1747 (1749), p. 214-219 ; *O.C.*, vol. I/4b.
- « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration : Suite », *HAB* année 1747 (1749), p. 220-249 ; *O.C.*, vol. I/4b.
- « Recherches sur le calcul intégral : Suite », *HAB* année 1748 (1750), p. 249-291 ; texte n°3, *O.C.*, vol. I/4a.
- « Eloge de Jean Bernoulli », *HARS* année 1748 (1752), p. 124-152 ; *O.C.*, vol. I/1.
- *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences des arts et des Métiers*, t. I-VII, Paris ; t. VIII-XVII, Neufchastel, 1751-1765.
- « Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration », *HAB* 1750 (1752), p. 355-360 ; *O.C.*, vol. I/4b.
- « Observations sur quelques mémoires, imprimés dans le volume de l'Académie de 1749 », texte n°4, *O.C.*, vol. I/4a.
- *Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides*, Paris, 1752 ; *O.C.*, vol. I/8.
- *Traité de Dynamique*, 2de édition, Paris, 1758 ; *O.C.*, vol. I/2.
- Mémoire 1, « Recherches sur les vibrations des cordes sonores », *Opuscules Mathématiques*, tome I, Paris, 1761, p. 1-64 ; *O.C.*, vol. III/1.
- Mémoire 4, « Réflexions sur les Loix du mouvement des fluides », *Opuscules Mathématiques*, tome I, Paris, 1761, p. 137-168 ; *O.C.*, vol. III/1.
- « Supplément à l'Art. 176 du *Traité de Dynamique* », *Opuscules Mathématiques*, tome I, 1761, p. 299-303 ; *O.C.*, vol. III/1.

- Mémoire 10, « Réfléxions sur le calcul des Probabilités », *Opuscules Mathématique*, t. II, 1761, p. 1-25 ; *O.C.*, vol. III/2.
- Mémoire 11, « Sur l'application du calcul des Probabilités à l'inoculation de la petite Vérole », *Opuscules Mathématique*, t. II, 1761, p. 26-95 ; *O.C.*, vol. III/2.
- « Extrait de différentes lettres de M. D'Alembert à M. De la Grange écrites pendant les années 1764 & 1765 », *Mélanges de Turin*, t. III, 1766, p. 381-396 ; *O.C.*, vol. III/10.
- « Sur les tautochrones », *HAB* année 1765 (1767), p. 381-413 ; *O.C.*, vol. III/10.
- Mémoire 25, « Nouvelles réflexions sur les vibrations des Cordes sonores », *Opuscules Mathématiques*, tome IV, Paris, 1768, p. 128-224 ; *O.C.*, vol. III/4.
- Mémoire 26, « Recherches de Calcul intégral », *Opuscules Mathématiques*, tome IV, Paris, 1768, p. 225-253 ; *O.C.*, vol. III/4.
- Mémoire 28, « Contenant quelques Ecrits sur différens sujets », *Opuscules Mathématiques*, tome IV, Paris, 1768 p. 342-366 ; *O.C.*, vol. III/4.
- Mémoire 30, « Sur l'Equilibre des Fluides », *Opuscules Mathématiques*, tome V, Paris, 1768, p. 1-40 ; *O.C.*, vol. III/5.
- Mémoire 31, « Nouvelles réflexions sur les Loix du mouvement des Fluides », *Opuscules Mathématiques*, tome V, Paris, 1768, p. 41-67 ; *O.C.*, vol. III/5.
- Mémoire 33, « Sur l'équation qui exprime la loi du mouvement des Fluides », *Opuscules Mathématiques*, tome V, Paris, 1768, p. 95-131 ; *O.C.*, vol. III/5.
- Mémoire 34 §II, « Sur la Vitesse du Son », *Opuscules Mathématiques*, tome V, Paris, 1768, p. 138-146 ; *O.C.*, vol. III/5.
- Mémoire 35 §I, « Réflexions sur les suites divergentes ou convergentes », *Opuscules Mathématiques*, tome V, 1768, p. 171-183 ; *O.C.*, vol. III/5.
- Mémoire 35 §II, « Sur l'expression de certaines quantités imaginaires, & à cette occasion sur les racines des équations du troisième degré dans le cas irréductible », *Opuscules Mathématiques*, tome V, 1768, p. 183-215 ; *O.C.*, vol. III/5.
- Mémoires 36 §I, « Sur la loi de la compression des Ressorts », *Opuscules Mathématiques*, tome V, 1768, p. 216-222 ; *O.C.*, vol. III/5.
- Mémoire 42 §I, « Du mouvement des apsides quand la force centrale n'est pas exactement en raison inverse du quarré de la distance », *Opuscules Mathématiques*, tome V, p. 425-440 ; *O.C.*, vol. III/5.
- Mémoire 44 §VII, « Sur la maniere d'exprimer certaines fonctions ; addition au Vingt-huitième Mémoire, Tom IV, p.345 », *Opuscules Mathématiques*, tome V, 1768, p. 511-512 ; *O.C.*, vol. III/5.
- « Extrait de différentes Lettres de Mr. d'Alembert à Mr. de la Grange », *HAB* année 1763 (1770), p. 235-277 ; *O.C.*, vol. III/10.

- *Supplément à l'Encyclopédie*, Panckoucke, tomes I-IV, Paris, 1776-1777.
- Mémoire 52 §I, « Réflexions sur la Théorie des Ressorts », *Opuscules Mathématiques*, tome VII, 1780, p. 1-38 ; *O.C.*, vol. III/7.
- Mémoire 56 §I, « Nouvelles réflexions sur les loix de l'équilibre des fluides », *Opuscules Mathématiques*, tome VIII, Paris, 1780, p. 1-35 ; *O.C.*, vol. III/8.
- Mémoire 57, « Nouvelles Recherches sur le mouvement des Fluides dans des Vases », *Opuscules Mathématiques*, tome VIII, Paris, 1780, p. 52-230, avec des appendices, p. 365-387 ; *O.C.*, vol. III/8.
- Mémoire 58 §VI, « Sur les Fonctions discontinues », *Opuscules Mathématiques*, tome VIII, Paris, 1780, p. 302-308 ; *O.C.*, vol. III/8.
- Mémoire 58 §VII, « Remarques sur quelques fonctions », *Opuscules Mathématiques*, tome VIII, 1780, p. 308-310 ; *O.C.*, vol. III/8.
- Mémoire 58 §XII, « Additions aux Recherches sur la Cause des Vents », *Opuscules Mathématiques*, tome VIII, Paris, 1780, p. 327-353 ; *O.C.*, vol. III/8.
- *Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, article « Cordes (vibration des) », t. I, Paris, 1784 ; t. II, Paris, 1786.

EULER (Leonhard)
- « De infinitis curvus eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis », *Comm. Acad. Petrop.*, volume 7, 1734 (1740), p. 174-183 ; *Opera Omnia*, série 1, vol. 22, p. 36-56 (E44).
- « Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis », *Comm. Acad. Petrop.*, volume 7, 1734 (1740), p. 184-200 ; *Opera Omnia*, série 1, vol. 22, p. 57-75 (E45).
- « Sur la vibration des cordes », *HAB* année 1748 (1750), p. 69-85 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 10, p. 63-77 (E140)
- « Remarques sur les mémoires précédens de M. Bernoulli », *HAB* année 1753 (1755), p. 196-222 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 10, p. 233-254 (E213)
- « De motu vibratorio cordarum inaequaliter crassarum », *Nov. Comm. acad. Petrop.*, t. 9, 1764, p. 246-304 ; *Opera Omnia*, série 2, vol. 10, p. 293-343 (E287).
- « De la propagation du son », *HAB* année 1759 (1766), p. 185-209 ; *Opera Omnia*, série 3, vol. 1, p. 428-451 (E305).
- « Supplement aux recherches sur la propagation du son », *HAB* année 1759 (1766), p. 210-240 ; *Opera Omnia*, série 3, vol. 1, p. 452-483 (E306).
- « Continuation des recherches sur la propagation du son », *HAB* année 1759 (1766), p. 241-264 ; *Opera Omnia*, série 3, vol. 1, p. 484-507 (E307).
- « Eclaircissemens sur le mouvement des cordes vibrantes », *Mélanges de Turin*, t. III, 1766, p. 1-26 ; *Opera Omnia*, série 2, vol. 10, p. 377-396.
- « Recherches sur le mouvement des cordes inegalement grosses », *Mélanges de Turin*, t. III, 1766, p. 27-59 ; *Opera Omnia*, série 2, vol. 10, p. 397-425 (E318).

- « Recherches sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{b}{x}\frac{dz}{dx} + \frac{c}{x^2}z$, », *Mélanges de Turin*, t. III, 1766, p. 60-91 ; *Opera Omnia*, série 1, vol. 23, p. 42-73 (E319).
- « Sur le mouvement d'un corde, qui au commencement n'a été ébranlée que dans un partie », *HAB* année 1765 (1767), p. 307-334 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 10, p. 426-451 (E339).
- *Institutiones calculi integralis*, vol. 3, St. Pétersbourg, 1770 ; *Opera Omnia*, série 1, vol. 13 (E385).
- *Leonhard Euler Correspondance Briefwechsel - Opera Omnia*, série IV A, vol. 5.

GAUSS (Carl Friedrich)
- « Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse », Helmstädt, 1799 ; *Werke* III, p. 1-30.

LACROIX (Sylvestre-François)
- *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, t. I (1797) & II (1798), Paris.

LAGRANGE (Joseph-Louis)
- « Recherches sur la nature, et la propagation du son », *Mélanges de Turin*, t. I, 1759, p. 1-112.
- « Nouvelles Recherches sur la nature et la Propagation du son »,*Mélanges de Turin*, t. II, p. 11-172 ; *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 151-316.
- « Addition à la première partie des recherches sur la nature & la propagation du son imprimées dans le volume précedent », *Mélanges de Turin*, t. II, p. 323-336 ; *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 319-332.
- « Solutions de différens problèmes de Calcul intégral », *Mélanges de Turin*, t. III, 1766, p. 179-380 ; *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 471-668.
- « Sur l'intégration des équations à différences partielles du 1er ordre », *NMAB* année 1772 (1774), p. 353-372.
- « Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des intégrales particulières », *NMAB* année 1779 (1781), p. 121-160.
- *Œuvres Complètes*, t. XIII, Paris, 1882.
- *Œuvres Complètes*, t. XIV, Paris, 1892.

LAPLACE (Pierre-Simon de)
- « Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles », *MARS* année 1773 (1777), p. 341-402.
- « Recherches sur plusieurs points du Système du Monde », *MARS* année 1775 (1778), p. 75-182.
- « Mémoire sur les suites », *MARS* année 1779 (1782), p. 207-309.
- *Œuvres Complètes*, t. XIV, Paris, 1912.

LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm)

- « Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturae », *Acta eruditorum*, 1686, p. 161-163.
- *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*, 1764.

MAUPERTUIS (Pierre Louis Moreau de)

- « Les Loix du mouvement et du repos déduites d'un Principe Metaphysique », *HAB* année 1746 (1748), p. 267-294.

MONGE (Gaspard)

- « Mémoire sur la construction des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *Sav. Etr.* année 1773, tome VII, 1777, p.267-300.
- « Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *Sav. Etr.* année 1773, tome VII, 1777, p. 305-327.
- « Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes », *MARS* année 1784 (1787), p. 85-192.

MONTUCLA (Jean-Etienne)

- *Histoire des Mathématiques*, tome III.

RIEMANN (Bernhard)

- « Sur la propagation d'ondes atmosphériques planes ayant une amplitude de vibration finie », *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Göttingen*, t. VIII, 1860 ; *Œuvres Mathématiques de Riemann*, trad. française, 1898, p. 177-206.
- « Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique », *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Göttingue*, t. XIII, 1854 ; *Oeuvres de Riemann*, t. I, p.225-272.

TAYLOR (Brook)

- « De motu nervi tensi », *Philosophical Transactions.*, vol. 28, 1713 (1713), p. 26-32.

VARIGNON (Pierre)

- « Précautions à prendre dans l'usage des Suites ou Series infinies résultantes, tant de la division infinie des fractions, que du Développement à l'infini des puissances d'exposants négatifs entiers », *MARS* année 1715 (1741), p. 203-225.

Bibliographie secondaire

BAILHACHE (Patrice)

- « D'Alembert théoricien de la musique : empirisme et nature », http ://patrice.bailhache.free.fr/thmusique/d'alembert.html, 27/03/07.

Burkhardt (Heinrich)

- « Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Erster Haupteil : Dis Ausbildung der Methode der Reihenentwicklungen an physikalischen und astronomischen Problemen », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, t. X-2, 1908, p. 1-894.

Cantor (Möritz)

- *Vorlesungen über Geschichte des Mathematik*, tome IV, 1908.

Chêne (Julien)

- « Le son dans les *Opuscules Mathématiques* de D'Alembert », Mémoire de DEA Construction des Savoirs Scientifiques, Université Lyon 1, 2004.

Chouillet (Anne-Marie) et Crépel (Pierre)

- « Un voyage d'Italie manqué ou trois encyclopédistes réunis », *Recherche sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 17, octobre 1994, p. 9-53.

Crépel (Pierre)

- : « Les dernières perfidies de D'Alembert », *Mathématiques et Sciences humaines*, n°176, 2006, p. 61-87.

Demidov (Serge)

- « D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles », *Jean d'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix*, Editions des archives contemporaines, Paris, 1989, p. 333-350.

Dhombres (Jean)

- « Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction », *Archive for History of Exact sciences*, vol. 36, n° 2, 1986, p. 91-181.

Engelsman (Steven)

- *Family of Curves and the Origin of Partial Differentiation*, North-Holland Mathematics Studies, 93, 1984.
- « D'Alembert et les équations aux dérivées partielles », *Dix-huitième siècle*, n° 16, 1984, p. 27-37.

Evans (Lawrence Craig)

- *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998.

Faye (Grégory)

- *Sur les Formes Différentielles, Annotation du Mémoire 26* , Stage de Licence ENS Lyon, Université Lyon 1, juillet 2006.

FERRARO (Giovanni)

- « Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815 », *Historia Mathematica*, 34, 2007, p. 62-88.

GILAIN (Christian)

- « Condorcet et le calcul intégral », *Sciences à l'époque de la Révolution française - Recherches historiques*, éd. R. Rashed, Blanchard, Paris, 1988, p. 85-147.
- « Condorcet, les mathématiques et le Supplément à l'Encyclopédie », *Lekton*, III-1, publication de l'Université du Québec à Montréal, 1993, p. 79-92.

GRIMBERG (Gerard-Emile)

- *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998.

GUILBAUD (Alexandre)

- *L'hydrodynamique dans l'œuvre tardive de D'Alembert 1766-1783 : histoire et analyse détaillée des concepts pour l'édition critique et commentée de ses Œuvres Complètes et leur édition électronique*, thèse de Doctorat, Université Lyon 1.

HOUZEL (Christian)

- « Les équations aux dérivées partielles : 1740-1780 », *Analyse et dynamique, étude sur l'œuvre de d'Alembert*, Presses de l'université de Laval, 2003, p. 237-258.

KAHANE (Jean-Pierre) et LEMARIÉ-RIEUSSET (Pierre-Gilles)

- *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, 1998

LÜTZEN (Jesper)

- « Partial differential equations », *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, I. Grattan-Guiness, London, Routledge, 1994, p. 452-469.
- *The prehistory of the theory of distributions*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 7, Springer-Verlag, 1982.

MALTESE (Giulio)

- « Taylor and John Bernoulli on the vibrating string : aspects of the dynamics of the continuous sytems at the beginning of the 18^{th} century », *Physis Riv. Internaz. Storia Sci.*, (N.S.) 29, 1992 (1993), n°3, p. 703-744 .

MARIE (Maximilien)

- *Histoire des sciences mathématiques et physiques*, tome VIII, Paris, 1886.

NESME (Sébastien)

- U_{n+1}/U_n *? D'Alembert et la convergence des séries*, mémoire de DEA « Construction des savoirs scientifiques », Université Lyon 1, Sébastien Nesme, juin 2003.

PASSERON (Irène)

- *Clairaut et la Figure de la Terre au XVIII^e siècle - Cristallisation d'un nouveau style autour d'une pratique physico-mathématique*, thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1994.

POUJET (Lionel)

- *L'équation des ondes*, Mémoire de Master 1, Université Lyon 1, mai 2006.

QUEFFÉLEC (Hervé) et ZUILY (Claude)

- *Elements d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995.

RAVETZ (Jerome R.)

- « Vibrating strings and arbitrary fonctions », *The Logic of personal knowledge, essays presented to Michael Polanyi on his seventieth birthday*, 11th March 1961, London, 1961, p. 71-88.

ROMERO (Angel)

- *La Mécanique d'Euler. Prolégomènes à la pensée physique des milieux continus (concepts et principes physiques, et analytisation*, thèse de Doctorat, Université Paris 7, 2007.

RUDIN (Walter)

- *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1995.

SZABO (Istvan)

- *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, 1977, Basel, Boston, Stuttgart, Birkhäuser, 1987.

TATON (René)

- « Une correspondance mathématique inédite de Monge », *Revue Scientifique*, 85, 1747, p. 963-989.
- *L'Oeuvre scientifique de Monge*, PUF, Paris, 1951.

TRUESDELL (Clifford)

- « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, série II, Volume 12, Zürich, 1954, p. VII-CXXV.
- *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788, Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia*, série II, Volume 11, Section 2, Zürich, 1960.

YOUSCHKEVITCH (Adolf P.)

- « A propos de l'histoire du débat sur les cordes vibrantes (D'Alembert et l'utilisation des fonctions "discontinues") », *Istoriko-matematitcheskie Issledovania*, 20, 1975, p. 221-231.
- « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^e siècle », *Fragment d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P n° 41, 1981, p. 7-68.